华 章 数 学 译 丛

2

THOMSON

The Mathematics of Finance

Modeling and Hedging

金融数学

(美) Joseph Stampfli
Victor Goodman 著

蔡明超 译

机械工业出版社
China Machine Press

金融数学

金融投资是现代社会最活跃的经济活动之一。自1973年出现Black-Scholes公式以来，金融界以前所未有的速度接受数学模型和数学工具，于是出现了数学、金融、计算机和全球经济的融合。在金融数学自身的吸引力和众多使用者需求的双重影响下，美国各大学纷纷开设了相应的课程，本书正是顺应这种趋势编写的。

本书主要讲解建模和对冲中使用的金融概念和数学模型。从金融方面的相关概念、术语和策略开始，逐步讨论了其中的离散模型和计算方法、以Black-Scholes公式为中心的连续模型和解析方法，以及金融市场的风险分析及对冲策略等方面的内容。

本书作为金融数学的基础教材，适用于相关专业的本科生和研究生课程。

The Mathematics of Finance

Modeling and Hedging

ISBN 7-111-13816-3

9 787111 138167

封面设计 陈子平

HZ BOOKS

华章图书

网上购书：www.china-pub.com

北京市西城区百万庄南街1号 100037

读者服务热线：(010)68995259，68995264

读者服务信箱：hzedu@hzbook.com

http://www.hzbook.com

ISBN 7-111-13816-3/O · 362

定价：26.00 元

华章数学译丛

2

The Mathematics of Finance

Modeling and Hedging

金融数学

(美) Joseph Stampfli
Victor Goodman 著
蔡明超 译

机械工业出版社
China Machine Press

本书主要讲解建模和对冲中使用的金融概念和数学模型．从金融方面的相关概念、术语和策略开始，逐步讨论了其中的离散模型和计算方法、以 Black-Scholes 公式为中心的连续模型和解析方法，以及金融市场的风险分析及对冲策略等方面的内容．

本书作为金融数学的基础教材，适用于相关专业的本科生和研究生课程．

Joseph Stampfli and Victor Goodman

The Mathematics of Finance：Modeling and Hedging

ISBN：0-534-37776-9

981-254-401-1

本书版权登记号：图字：01-2003-6969

图书在版编目（CIP）数据

金融数学/（美）斯塔夫里（Stampli，J.），（美）古德曼（Goodman，V.）著；蔡明超译．—北京：机械工业出版社，2004．3

（华章数学译丛）

书名原文：The Mathematics of Finance：Modeling and Hedging

ISBN 7-111-13816-3

Ⅰ．金… Ⅱ．①斯…②古…③蔡… Ⅲ．①金融—经济数学—高等学校—教材②金融—经济数学—研究生—教材 Ⅳ．F830

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2004）第 003159 号

机械工业出版社（北京市西城区百万庄大街 22 号　邮政编码　100037）

责任编辑：蒋　祎

北京牛山世兴印刷厂印刷·新华书店北京发行所发行

2004 年 3 月第 1 版第 1 次印刷

787mm×1092mm 1/16·15 印张

印数：0 001～4000 册

定价：26.00 元

译者序

金融数学是指采用高等数学的方法研究金融资产及其衍生资产定价、复杂投资技术与公司金融政策的一门交叉科学. 21 世纪中国经济与金融领域研究的一个重大转变，就是数量方法的研究被越来越广泛地应用，这也已经成为一个共识. 数量方法在金融中的大量应用使得数学与金融的联系变得密不可分，由此产生了金融数学这门交叉学科. 研究方式的转变也带来了教学方式的变革，我国高校金融学科普遍加强了数量方法类课程的设置，金融数学往往是被优先考虑的课程. 同时我国很多综合性大学的数学系也纷纷增设金融数学专业.

金融数学在我国的发展不仅是我国开展金融理论研究的需求，在实践方面，我国工商企业以及居民的投资、避险要求也进一步推动了金融数学学科的发展. 早在 1997 年中国银行首先获准开办企业经常项目下的远期外汇结售汇业务，2002 年和 2003 年又分别面向居民推出了“外汇两得宝”业务和“外汇期权宝”业务，其实质分别是外汇卖出期权和买入期权. 2000 年中国工商银行外汇衍生产品的业务量只有 5 亿美元，2001 年有 13 亿美元，2002 年达到了 23 亿美元，2003 年头四个月就达到了 26 亿美元. 这些统计数据表明，金融衍生产品在我国有巨大的发展空间. 要想灵活运用金融衍生产品帮助企业和居民进行投资或者规避风险，必须从理论上掌握这些产品的定价方法. 金融数学正是连接数学与金融定价模型及其他金融问题的一座桥梁.

金融与数学的交叉使得金融数学与金融工程等学科的界限不能完全确定，金融数学的范畴也没有统一的界定，译者在拙著《金融数学与分析技术》中提出，依研究方法，金融数学包括两个分支：规范金融数学和实证金融数学. 规范金融数学强调运用高等数学、最优化、概率论、微分方程等知识对金融原理进行推导，比如第一次华尔街革命即资产组合问题与资本资产定价模型和第二次华尔街革命即期权定价公式；而实证金融数学强调运用统计学、计量经济学、时间序列分析等知识对金融原理进行假设检验，并得出一些经验性结论，比如资产定价模型的检验、行为金融学的检验等等.

Joseph Stampfli 和 Victor Goodman 撰写的《金融数学》是一本以规范金融数学为主的书，集中介绍了衍生产品定价模型的推导，本书的特点表现在以下几个方面：

第一，对读者数学知识的要求定位合理. 不管是从美国还是从国内来看，金融数学专业大多数设置在数学系，因此许多金融数学教材对数学知识的起点定位太高，而更大的读者群应该是大学经济管理学院的师生，他们的基础是大学公共高等数学知识，因此很多金融数学教材难以读懂. 本书的最大特点就是以大学公

共高等数学的知识为起点展开对模型的推导和应用，特别适合于非数学类学生学习和应用.

第二，金融模型的应用建立在通用软件的基础上. 本书部分章节集中介绍了如何采用软件来对金融模型进行应用分析，比如模拟股票价格游走的路径，并得到期权定价结果. 该书采用的计算机方法主要以读者能够接受的 Excel 表单为界面，使得读者在通过计算机深入掌握金融理论的同时，不必专门学习一门计算机语言，从而降低了学习难度.

第三，丰富的案例分析. 为了让读者能够掌握金融期货期权理论的具体运用，作者在每章都安排了相当数量的实例展开分析，并且配以图表. 同时为了检验读者是否真正掌握了书中知识，每章都配有一定量的习题，部分附有答案.

第四，内容精简且重点突出. 正如前面所言，金融数学的内容很广，一些教材往往希望面面俱到，总希望读者读完后能够掌握所有的金融数学方法. 但金融数学的复杂性使得这些想法不可能成为现实，洋洋洒洒也会带来读者学习的心理压力. 该书集中讲述普通衍生期权定价的方法，并以这些方法为线索进行展开和深入，因此读者学完后能够在这一领域做到运用自如，而不是多而不精.

在翻译过程中，译者力求忠实于原文，同时也兼顾中文表达的流畅. 书中首次出现的术语在书后都有中英文对照. 尽管译者多年从事研究生和本科生金融数学的教学工作，但译文中仍可能有不当之处. 欢迎读者予以指正. 李凯、樊炀参加了本书的翻译工作，杨艳、胡瑶、王洁也参与了本书部分章节的初稿翻译. 但所有错误之处，均由译者本人承担.

在翻译过程中，机械工业出版社华章分社的蒋祎先生给予了细心帮助，在此表示谢意.

蔡明超

2004 年 1 月于上海交通大学安泰管理学院

谨以此书怀念 Harrison "Harry" Roth（1932－1997）

——Joseph Stampfli

他一生善良，交织在他身上的各种美德，可以使造物主肃然起敬，并向全世界宣告："这是一个男子汉！"

献给我深爱的盖尔

——Victor Goodman

前　言

20 世纪 90 年代以来，数学、金融、计算机及全球经济呈现融合趋势．货币市场每天的交易量达到 2 万亿美元，诸如期权、互换、交叉货币证券等复杂金融工具的交易非常普遍．

可以讲，自 1973 年 Black-Scholes 公式出现以来，金融界被大量丰富的数学工具和模型所包围．高校开设的金融数学类课程受到普遍欢迎．这当然与利润的驱使以及巨大的就业前景有关．可以预见，21 世纪金融数学领域将如 Kurzweil 加速回报定律所描述的那样增长更为迅速．从业人士们也开始运用金融数学的思考模式来对大量的市场交易活动进行应用分析．

这本教材解释了模型与套利中的金融和数学的基本概念．每个主题在展开时并不要求读者熟知金融市场或者证券市场的常识．在练习与例题中会对这些内容加以说明，并且经常会采用实际的市场数据．

教师需知

完整的本科生层次的教学内容应包括：第 2、3、5、6、7、8、9 章．教师可以简要地介绍第 1 章，作为介绍金融术语和证券交易中策略的导论；也可以在讲课过程中需要时再回到第 1 章，这一章非常便于学生了解市场交易中的知识．

大多数本科生能够熟练运用计算机，对于 Maple、Mathematica 和 Microsoft Excel 的各种命令也很熟悉．老师们应该充分发挥学生在该领域的才能．比如我们发现在印第安那大学校园，学生们随时都可以采用 Excel 软件来准备数据，并完成答案．

致谢

我们非常感谢国家科学基金（National Science Foundation）为本书提供了很多资料，特别要感谢国家自然科学基金的主要评审员 Dan Maki 和 Bart Ng，他们用“数学贯穿于课程之中”来激励我们写作，并在全书的创作过程中一直给予包括经济方面的帮助．我们还要感谢本书的评阅人：伊利诺斯大学的 Rich Sowers，La Grange 学院的 William Yin 和匹兹堡大学的 John Chadam．

1999 年 11 月在马黑德尔（Mahidol）大学的资助下，Joseph Stamofli 在泰国曼谷就金融数学专题面向一个工作小组做了几场演讲．非常感谢马黑德尔大学以及 Yongwemon 教授和时任系主任及现任校长 Ponchai Matangkasombut，他们细致热忱的接待使得那一次学术活动令人十分难忘．

我们也要感谢在 Brooks/Cole 工作的编辑和出版人员持之以恒并且及时的帮

目 录

第 1 章 金融市场

如果你能洞穿时间的种子，并且知道哪一粒会发芽，哪一粒不会，那么请告诉我吧！

——莎士比亚，《麦克白》，第一场，第二幕

注意 本章的目的是介绍一些术语，其中包括一些必须要掌握的概念、思想和定义. 我们并不建议把本章作为一个单元通读，你可以根据需要有选择地阅读本章内容.

1.1 金融市场与数学

几乎人人都听说过纽约、伦敦和东京证券交易所. 这些市场的交易活动经常成为报纸的头版，并且在晚间新闻的专题节目中播报. 此外还有许多其他金融市场，每一个市场的特点取决于交易的金融资产的种类.

本书将要讨论的最重要的市场包括股票市场、债券市场、货币市场以及期货和期权市场. 这些金融术语稍后解释. 但是，首先必须注意的是，在某一市场交换或交易的每一品种必定是以下两种类型中的一种.

交易品种可以是*基本资产*(basic equity)，例如，股票、债券或一种货币. 交易品种也可以是价格可从其他基本资产的价格间接衍生出的资产. 此时，该交易品种的资产即为*金融衍生产品*，它所涉及的资产则称为*标的资产*.

本章包含很多金融衍生产品的例子. 为了使读者弄清衍生产品的概念，每个例子都会给出透彻的解释. 我们的例子将会是基于股票、债券和货币的期权. 同时，我们也会谈及期货和基于期货的期权.

当我们试图把衍生产品的价格和标的资产的价格联系起来的时候，数学是能够表达这些关系的最严密的方法. 基于数学的证明能对于这些价值做出相当精确的估计.

本书的主要目的就是解释根据标的资产的价格计算衍生产品价格的过程.

我们也希望向读者提供完成这一过程的数学工具和技巧. 通过对这一过程的认识，你将了解如何使用这些衍生产品，并且理解设计和交易金融资产过程中所伴随的风险. 这些关于衍生产品交易的认识也将提供给你现代资本市场如何运作的更多知识.

本书里的数学知识将强调过去二十多年中金融业衍生产品交易发展的道路上，具有举足轻重影响的两大金融概念.

我们将强调的第一个概念是投资学中*复制*(replicate)资产的概念. 其次将研

究在无套利条件(absence of arbitrage opportunity)下资产行为的数学模型.

将这两大概念的结合可以提供一种发现价格的强大工具. 关于这一点，用一个例子足以说明问题. 在下一节中，我们将给出一个复制投资组合和无套利机会条件下衍生产品定价的例子. 该例值得仔细阅读.

1.2 股票及其衍生产品

一家公司可以通过将其股份出售给投资者的方式筹集资金. 该公司为股东所拥有(owned). 这些拥有者持有*股票*或*股权证明*，他们是否可以取得*股利*，取决于公司的赢利情况以及公司是否决定和拥有者分享股利.

公司股票的价值是什么? 其价值反映出投资者对于可能的股利支付、未来利润以及公司控制资源的观点和预测. 这些不确定性由该股票的买卖双方来解决(在每个交易日). 他们的观点通过*拍卖市场*，例如，在纽约、伦敦和东京证券交易所上买卖股票来执行. 亦即，一个股票在某一时刻的价格在很多时候由其他人愿意为其支付的金额来判断.

什么是股票衍生产品呢? 它是一个特定的合约，其在未来某一天的价值完全由股票的未来价值决定. 制定并出售该合约的个人或公司称为*卖方*(writer). 购买该合约的个人或公司称为*买方*(holder). 该合约所基于的股票称为*标的资产*.

衍生产品的价值是多少呢? 这样一个合约的条款对于其价值的任何估计都是至关重要的. 我们的第一个例子选择一个结构简单的衍生产品，以便方便地解释我们主要的金融概念(复制资产和无套利机会). 这些概念将帮助我们给定一个衍生产品的价格.

我们在该例中也会解释一些交易机制，这对于理解以后将遇到的相关概念非常重要.

1.2.1 股票的远期合约

如果我们能够保证，在未来的某一天，某人将保证以某一价格买入一股股票，则事情有时会变得很方便. 这种在未来买入的义务就称为*远期合约*.

以下是合约的一些条款:

- 在确定的日期(即*到期日*)，合约的买方必须支付规定数量的钱(即执行价格)给合约的卖方.
- 合约的卖方必须在到期日转让一股股票给买方.

图 1-1 是远期合约中股票以及现金交易的图示. 这种远期合约通常简称为*远期*.

该合约在到期日对于买方来说可以是一担好买卖，也可能是亏本生意. 结果取决于到期日的股价.

到期时的利润或损失

下面从定量角度来分析，我们用 S_T 表示到期时的价格，用 X 表示要求的执

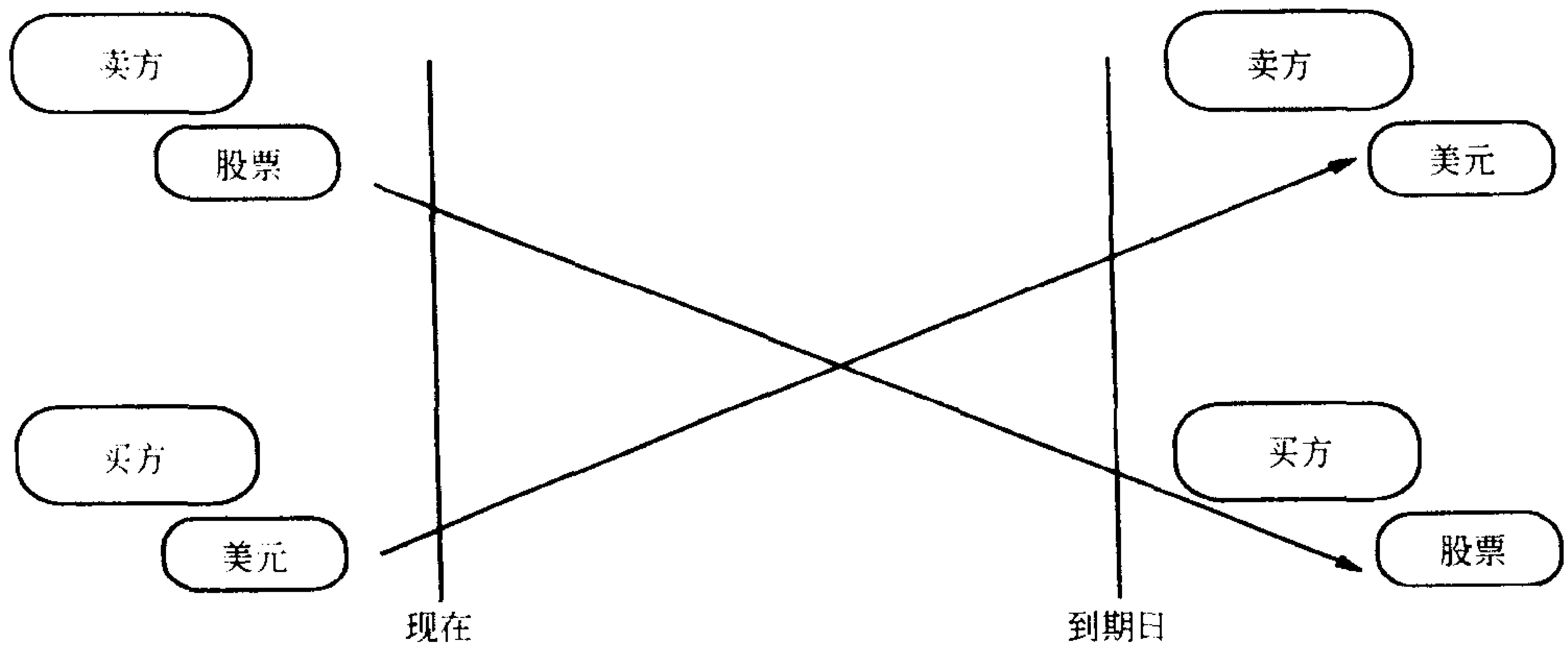


图 1-1 远期合约

行价格. 执行价格 X 是已知量. 在英文中也可以将执行价格(exercise price)称为交易价(strike price). 而且通常将"到期日"称为"执行日期"(strike date).

在 T 时刻买方的利润或损失表示为:

$$S_T - X$$

是否可以找到用以计算远期合约到期之前利润或损失的价格公式呢? 合约应该值多少并非一个学术问题. 现代金融市场允许合约买方在任何交易日在市场上 3
出售合约或者购买新合约. 换句话说, 这些工具可以**交易**.

你可以想像如果当天价格远高于执行价格 X, 并且到期日为期不远, 则合约具有较高价值. 另一方面, 如果今天的股价非常低, 那么合约几乎没有价值. 我们可以通过复制其他资产的方式得到远期合约价值的定价公式.

复制投资

首先构造一个**资产组合**, 包括一个远期合约(价值 f 美元)和如下数量的现金:

$$Xe^{-r(T-t)}$$

该组合现在的净价值为

$$f + Xe^{-r(T-t)} \tag{1-1}$$

其中的指数项将随现金流的利息收入而抵消.

资产组合中的任何现金量从现在起至到期日按照 $e^{r(T-t)}$ 因子增长. 因为现金可以安全地投资, 这一假设是合理的. 这里, "安全地"意味着现金资产不会因为市场价格变化而产生风险, 并且如果有更好的投资选择可以立刻变现. r 表示该项投资的即期利率回报. 在 2000 年春短期货币投资的利息 r 是年利率 0.055.

现金量在远期合约到期时的值正好达到与资产组合相应的目标值.

在到期日, 资产组合的收支包括得到一股股票同时支付执行价格, 但是资产组合中的现金投资部分刚好增长到与执行价格相等的值. 实际上, 投资的现金部

分抵消执行价的支出.

我们可以说在到期日这项资产组合复制了一股股票. 当然价格正好一致，因为

合约价值 + 现金量 = 一股股票

资产组合的交易

现代金融市场的发展速度令人叹为观止. 市场制度允许资产组合可以像一项资产一样在到期日之前进行交易. 事实上，某人可以在任何时间购买这种合约同时支付一部分现金，这相当于购买一个单位的资产组合.

另一方面，即使某人并不持有合约，它通常也可以在市场上出售该合约. 投资者成为合约的卖方并且承担卖方的责任. 如果某人并不持有诸如股票之类的根本资产而出售该资产，之后再购买股票用于交付，这种活动被称为*卖空资产*. 几
4 乎所有的股票都可以卖空. 毫无疑问，某人可以仅通过以短期利率 r 借钱而卖空在资产组合中一定量现金. 实际上，即使我们一开始就并不持有该项资产组合，我们也可以出售.

我们刚解释了某人可以购买或出售一项投资或资产组合，该资产可以用来在未来某天复制一股股票. 这也引出一个问题，复制以前资产组合与股票的价格关系如何. 我们将应用前面介绍的第二项重要的金融原理，即*无套利机会*，把各资产的价格等同起来.

第一套利机会

假设今天价格和其未来价值不一致. 事实上，让我们看当

合约价格 + 现金量 < 一股股票

时的情形.

这简直是发掘了一个金矿，投资者今天可以卖空大量股票. 对于那些有勇气出售他们并不持有的东西的投资者，会立即得到大量现金. 这些投资者可以使用得到的现金的一部分购买相应数量的资产组合单位，用以弥补先前的卖空.

也就是说，当到期日来到，投资者可以利用复制资产组合弥补所有的买空股票. 因为抵消卖空需要的资金更少一些，不论未来市场如何变化，你可以看到他(她)在最初有多余现金.

第二套利机会

如果相反的情形发生了，即

合约价格 + 现金量 > 股价

正如我们对资产组合的交易的解释，投资者可以卖空资产组合. 类似的计算表明那些用便宜的股票抵消这些卖空的投资者，在卖空资产组合后立即买进股票，照样可以高枕无忧.

因为投资者知道每一单位的卖空资产组合在到期日恰巧就是卖空一单位股票，所以他(她)并不因为到期日的临近而感到不安. 同样，不论未来市场如何变

化，投资者一开始就赚到一定现金.

这两种赚钱计划在实物的金融市场决不会发生. 我们稍后会讨论其中原因，现在如果假设市场上不存在上述两种价格不相等的情形，我们可以得到如下结论：

无套利定价公式

今天远期合约的价值 + 现金量 = 今天股票的价格

我们用净价公式(1-1)代替上式中的各价格得到公式

$$f + Xe^{-r(T-t)} = S_t$$

5

公式可以重新写成：

$$f = S_t - Xe^{-r(T-t)} \tag{1-2}$$

公式(1-2)表明我们已经得到了 f 的解，即要得到该合约今天的价值，需要知道今天股价的报价和短期利率. 只要将这些因素代入上面公式，就得到了从今天起始的股票远期合约的价格.

随着股价的变化和距离到期日时间的减少，远期合约的价格每天都要重新计算. 因为远期合约通常 90 天内到期，所以在实践中 r 值不太可能变化. 因为时间间隔非常短，资金的收益率对于距离到期日的剩余时间远远比对于一个月或三个月现金投资利率敏感.

例 假设我们有一个 Eli Lilly 股票的远期合约，从现在起 40 天后到期. 如果执行价格是 65 美元，今天股票价格为 $64\frac{3}{4}$ 美元，今天合约的价格是多少？

我们使用每年 0.055 的 r 值. 我们代入公式(1-2)的时间长度是

$$T - t = 40/365 = 0.1096(\text{因此 } e^{-r(T-t)} = 0.994)$$

两个报价分别为：

$$S_t = 64.75 \text{ 以及 } X = 65$$

最终结果是

$$f = 64.75 - 65(0.994) = 64.75 - 64.61 = 0.14(\text{美元})$$

该公式给出的另一个启示是：在本例中，相同的执行价和股票价格下，合约期限越长(例如，6 个月)，价格越高，因为 $e^{-r(T-t)}$ 项变为 0.974. 这表明公式(1-2)非常有用. 它使我们能比较不同到期日和不同执行价下的远期合约的价格.

为什么说复制和无套利的观点成立？

由公式(1-2)给出的理论价格公式和远期合约的市场价格不会有明显的差异. 任何明显的价格差异将导致投资者采用我们前面讨论的两种投资策略之一. 确定性的盈利将促使他们在其中一种计划中大量投资. 他们的行为会改变价格，并直到标的股票的价格发生变动使得套利机会不再存在. 例如，如果卖空大量的某种股票，因为市场上这么多股票待售，股票的现价会下降.

也就是说，确定性盈利机会的存在使一些投资者在市场上进行买卖，使得股
6 票和远期合约的价格回到均衡状态，并最终导致套利机会消失.

1.2.2 看涨期权

某人可以购买一种机会，在未来以约定的价格购买一股股票. 这种不附带义务的未来购买的权利被称为

看涨期权

下面是期权中的一些条款：

- 期权的购买者向出售者支付费用，即为升水.
- 在到期日，合约的买方以执行价向合约卖方支付.
- 如果合约卖方收到买方以交易价支付，在到期日他必须交付一股股票给买方.

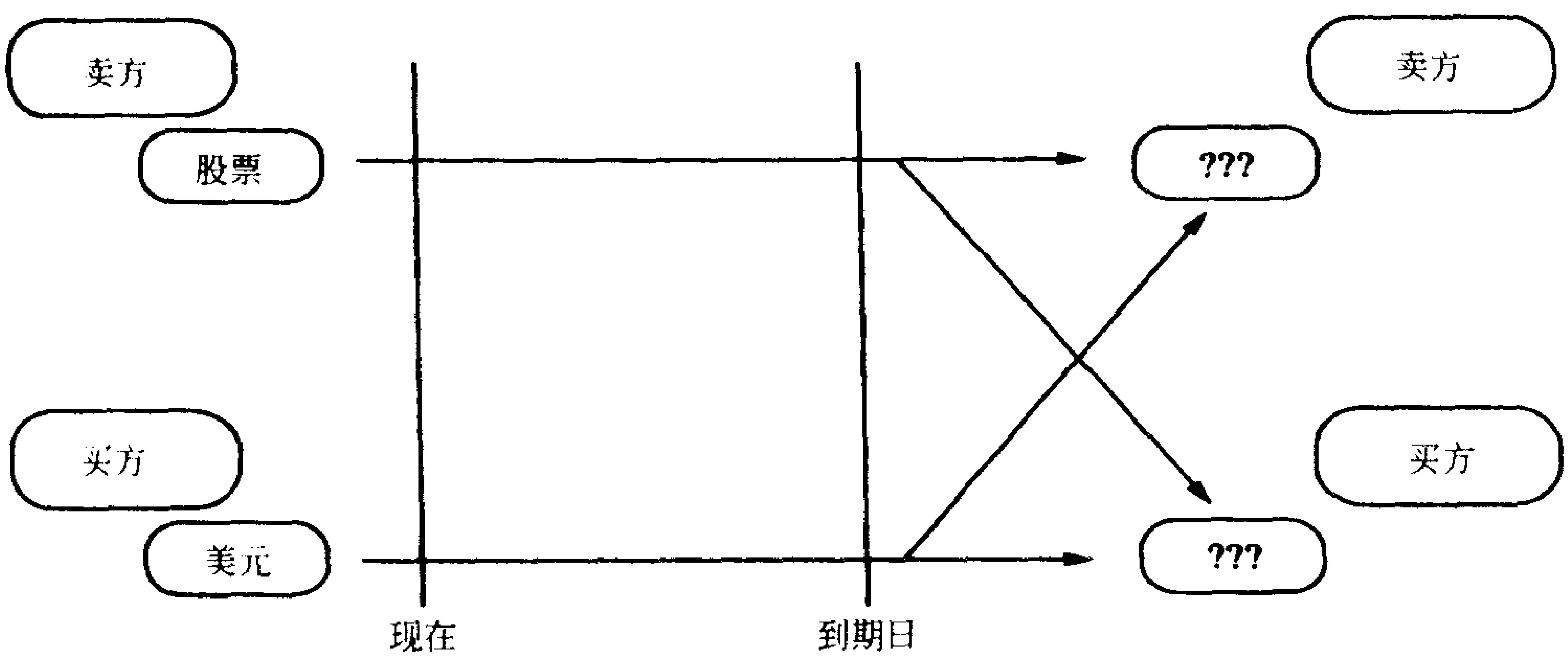


图 1-2 看涨期权

图 1-2 是股票和现金可能交易的图示. 注意到合约的买方有购买的选择权. 如果他(她)不想买股票，则可以拒绝支付执行价. 很明显这种情形在到期日股票价格低于执行价的时候发生. 另一方面，如果买方看到到期日股价较高，那么他(她)一定会选择支付执行价同时获得高价格的股票. 我们称这种情形为期权被执行了.

到期时的利润或损失

在期权合约中，要么交易不发生，要么合约的卖方向买方支付股票价格与执行价之间的价差. 因此我们能够用到期的股票价格 S_T 和执行价 X 描述买方未来可能的支付量，即：

7 看涨期权的现金流 $=\max\{S_T-X,\ 0\}$

如果 S_T-X 为正，该“最大值”公式等于 S_T-X；否则结果为 0. 我们可以把

现金流缩写为：

$$(S_T - X)^+$$

符号$(x)^+$表示$\max\{x, 0\}$

然而，一些看涨期权的现金流可能更多．看涨期权有两种，我们前面一直讨论的期权中，买方的权利受到制约，即只有在到期时才能行使它的期权．这种看涨期权称为欧式看涨期权．

另外一种看涨期权是美式看涨期权，限制较少．允许买方在到期日前的任何时间行使期权．当然，一旦它被执行，合约就清算完成．美式看涨期权比欧式看涨期权的现金流收入更高．

例　欧式看涨期权　假设我们持有通用电气(GE)的看涨期权，将在从今天算起20天后到期．假设执行价是88美元．如果今天的市场价格是84美元，因为支付的费用超过现在股票价格，你也许会认为看涨期权一文不值．但从现在起20天后市场价格变得更高是完全有可能的．假设到期日价格是$95\frac{1}{2}$美元．那么我们执行期权将盈利：

$$95.5 - 88 = 7.50(\text{美元})$$

该期权到期前20天的合理升水可以是4美元．在这种情况下，净利润是3.50美元．利润投资比率相当可观：

$$\frac{3.50}{4.00} = 0.875$$

即我们投资看涨期权的资金收益率是87.5%．不幸的情形也会发生，如果通用电气(GE)股票在20天中仅仅上升到$87\frac{7}{8}$美元．此时看涨期权将毫无价值，同时我们的投资损失100%．这说明购买看涨期权的过程中伴随着风险和不确定性．

例　提前执行　假设我们持有IBM股票的美式看涨期权，该期权在从现在算起将在15天后到期．我们假设执行价是105美元，如果IBM今天的市场价是107美元，我们也许会一直等到期权到期，希望从现在起15天之内价格会位于107美元之上．

另一方面，假设下星期IBM股票上涨到每股112美元．对于持有的美式看涨期权而言，我们可以立即执行期权，如果不计算期权成本将获得每股7美元的利润．如果我们假设每一看涨期权支付4.50美元，则我们每一看涨期权的净利润将是2.50美元．利润率是

$$\frac{2.50}{4.00} = 0.555$$

也就是说，我们投资看涨期权的资金收益率是55.5%．你也可以说该收益率超过了前面欧式期权例子中较高收益率的情形，理由是55.5%的收益是在较短时间间隔内获得的．如果股票市场价格存在机会，美式看涨期权可以在短期内产生大量利润． 8

欧式期权由于有执行的限制，未来的现金流收入可能会低一些．但有针对欧式期权现金流收入的表达式．正因为如此，估计这种期权的价格比估计美式期权容易．

看涨期权的价格

如何计算一个欧式期权的价格？这项任务比我们在 1.2.1 节遇到的要艰巨得多．这个问题将在以后章节讨论．看涨期权的计算价格取决于我们用来描述标的股票行为的数学模型．

我们的金融原理——复制和无套利——确实可以推导出看涨期权的估计价格．前面章节提到如下远期合约的利润或损失公式：

$$S_t - X$$

我们可以从该节给出的远期合约的利润公式看出，到期时看涨期权的现金流收入等于或大于上述收入．在 1.2.1 节，我们采用远期合约与现金复制一个股票．因此，如果我们将看涨期权加上等量的现金，我们可以创造优于股票的投资机会．

回顾 1.2.1 节中的无套利机会，无套利在这里可以表示为：

$$Call + Xe^{-r(T-t)} \geqslant S_t$$

这意味着看涨期权的价格满足关系：

$$Call \geqslant S_t - Xe^{-r(T-t)}$$

该公式与远期合约价格公式相对应，是实际看涨期权价格的估计下限．

1.2.3 看跌期权

你可以购得一种机会，在未来以确定价格出售一股股票，即使你并不持有任何股票．这种未来出售的权利被认为是：

看跌期权

下面是期权的一些条款：

- 期权的购买者向出售者支付费用，称为升水．
- 在到期日，合约的买方也许给合约卖方一股股票，或者等量的一股股票的市场价格．
9 - 如果合约卖方从买方收到股票或其价格，在到期日他必须支付执行费用给买方．

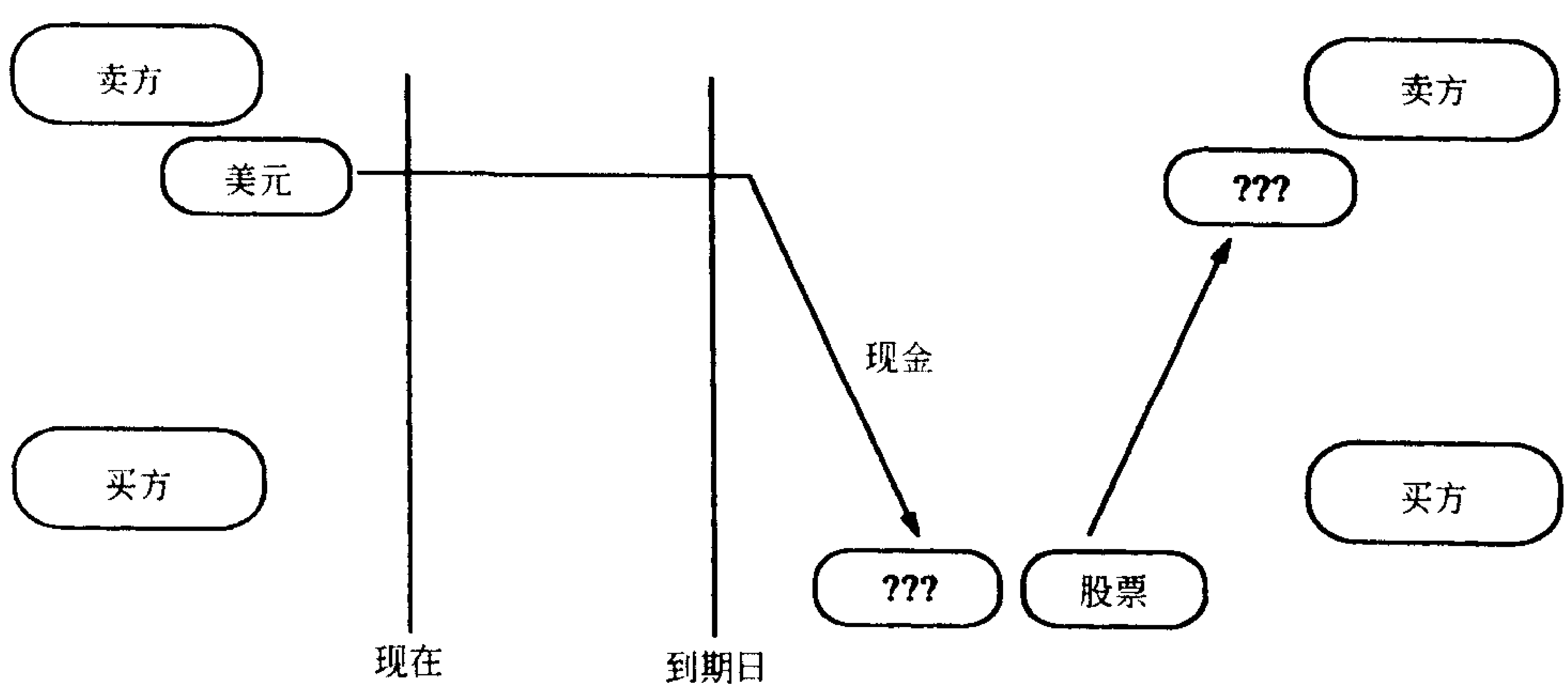


图 1-3　股票和现金可能交易的图示

合约的买方有投资的选择权. 如果买方不想卖出一股股票, 他(她)可以取消任何交易. 这种情况将在何时发生? 假设到期日股票价格高于执行价, 这对于买方将是一次损失的交易, 明智的投资者会拒绝执行期权.

相反, 如果看跌期权的买方发现到期日时股价较低, 那么他(她)选择从卖方处获取费用并且使用其中部分购得一股股票, 剩余部分即为利润.

到期时的利润或损失

只会发生下面两种情形: 要么没有交易发生, 要么合约卖方向买方支付执行价和股价差额, 合约被清算. 所以, 我们可以用股价 S_T 和执行价 X 描述可能的现金流收入.

我们可以说:

看跌期权的现金流收入 $=\max\{X-S_T, 0\}=(X-S_T)^+$

如同看涨期权的情形一样, 许多的看跌期权有更高的现金流收入. 我们一直讨论的是有约束的看跌期权, 即买方只能到期时才能行使权利. 这种期权是欧式看跌期权.

另一种看跌期权, 美式看跌期权, 限制较少, 因为买方可以在到期前的任何时间执行它.

美式看跌期权或许会比欧式看跌期权有更高的现金流收入.

例 保护性的看跌期权 Brown 博士在医药行业从事工作, 持有大量他熟悉的医药类公司的股票. 默克公司(Merck)司每股股价为 50 美元, 她认为在未来数月股价将波动很大. 10
她希望尽快开始出售该股票, 以便为她的医药试验购置一些大型仪器.

她开始一个投资计划, 购买大约 3 个月到期的看跌期权, 执行价格设在 45 美元. 每一看跌期权要支付 2.80 美元的升水. 因为未来股价如果较低看跌期权将会被执行, 该项战略保证了她筹集现金的能力. 通过看跌期权出售的股票可以使她每股至少获得 45 美元.

只要她持有这些股票的看跌期权, 她就有出售这些股票的最低价格保证. 如果股票价格始终高于 45 美元的最低点, 看跌期权变得无价值. 她为每个看跌期权支付的 2.80 美元的费用可以被认为是"保险升水". 看跌期权保证了她能够以 45 美元或更高的水平出售她的部分股票.

例 提前执行 假设我们持有一股福特公司(Ford)股票的看跌期权, 该期权从现在起 15 天后到期. 假设执行价为 35 美元. 如果今天福特的市场价格是 33 美元, 我们也许会一直等到看跌期权到期, 希望从现在起 15 天内市场价格会低于 33 美元.

另一方面, 假设下周福特股票的价格将跌至每股 29 美元. 由于持有美式看跌期权, 我们可以立即执行期权, 从而在忽略期权成本时每股将获得 6 美元的利润. 因为看跌期权并不昂贵, 我们在每一看跌期权上的利润率可以很高.

欧式期权有执行的约束, 其未来的现金流收入也较低. 如同看涨期权的情形, 我们

至少有一个欧式期权现金流收入的公式．正因为如此，估计这种期权的价格比估计美式期权容易．

看跌期权的价格

计算或估计看跌期权的价格像看涨期权一样困难．这个问题将在以后章节讨论．计算的价格将有赖于我们希望用来描述标的股票行为的数学模型．

1.2.4 卖空

读者无疑已经注意到在资本市场交易的种类远远不限于某一数量的股份被那些对它感兴趣的投资者所持有那样简单．交易手段的多样性提高了股权交易的可能性，这种可能性被称为资产交易的流动性．资产的流动性会存在一些约束．

理解下列卖空的条款很重要．

1. 某人(通常从经纪人)借入具体数量的股票，今天出售这些股票．
2. 借的股票哪一天必须被归还并未指定．
3. 如果借得股份的买方想出售股票，卖空者必须借其他股份以归还第一次
11 借得的股份．

1.3 期货合约定价

期货合约是购买者和出售者双方的协议，约定在未来某一具体时间完成一笔交易．现在并不发生商品和钱的转移．

例 2000 年 1 月 1 日，购买者和出售者达成一项协议，在 2000 年 10 月 1 日，出售者交付一桶石油给购买者，同时，购买者在那天要支付给出售者事先约定的每桶 15.67 美元的价格．

股票指数(例如道琼斯指数、标准普尔 500 指数、罗素(Russell)2000 指数)、货币、利率(例如美国国债、欧元、伦敦银行间拆借利率)以及商品(例如小麦、棉花、咖啡豆、铜、原油、天然气)都有相应的期货合约，应有尽有．

期货合约是否有实用价值？当然是的．让我们看一个例子．

例 克罗格(Kellogg's)公司用大量的谷物生产克罗格谷物片．在 2001 年 3 月，它可以购买一个 2001 年 12 月到期的谷物期货合约(在 2001 年收获之后)．这样它保证可以获得一个“合理”的价格．它避免了因为干旱而导致购买的谷物价格大幅度上升的可能性．类似地，农民或合约的出售者也保证她在即便是种庄稼的很多、价格下降的情形下，也可以获得一个“合理”的价格．双方互惠．克罗格公司和农民都不想从事天气预测性的商业活动．注意到期货合约使价格平稳，为双方避免不确定性和可能的灾难．

你可以很容易地发现飞机和发动机燃料价格以及跨国公司和货币汇率的类似的例子. 我们下面考虑期货合约定价的问题. 对于股票期货，我们可以找到一个确定的价格，所用到的方法对于理解金融衍生产品也至关重要.

股票期货

假设购买者同意在未来第 T 天买入一股股票. 同时，购买者和出售者希望确定价格为 X 美元，当购买者买入股票的时候他应该以这个价格支付给出售者. 购买者和出售者应该把 X 值定为多少呢?

让我们用如下方法来处理该问题. 我们已经同意在时间 T 交割一股股票. 在那一时刻股价可能比今天的价格高得多或低得多. 如果我们只是等到时间 T，交割的价格完全由市场决定. 那么有没有使自己免受极端价格冲击的方法? 停下来考虑一会儿，你应该能够发现一个简单的解决方法.

简单的解决方法. 我们今天仅买一股股票(在 $t=0$ 时刻，价格为 S_0)，然后先把它放在一边不予理会. 我们将它一直持有到时刻 $t=T$ 才卖出. 为了支付购买股票的钱，我们今天以 r 的无风险利率借入 S_0. 在交付日，我们应偿还的债务 12
在时间 T 已经增长到 $S_0 e^{rT}$. 为了收支平衡同时避免亏损，我们约定卖出的期货合约应收取价格为 $S_0 e^{rT}$.

这样我们已经从保持盈亏平衡或保护的角度说明了定价过程. 让我们再从稍稍不同的角度来分析该交易. 这种新思路也会导致期货的定价为 $S_0 e^{rT}$. 假设某人提出支付 $S_U > S_0 e^{rT}$ 购买期货. 我们将会兴高采烈地接受. 遵循上面讨论的策略，在结算时(时间 T)我们最终获得净值

$$S_U - S_0 e^{rT} > 0$$

(我们的顾客支付给我们 S_U，我们支付的欠款为 $S_0 e^{rT}$)我们将得到确定而无风险的利润. 在这种情形下，购买期货的人会发现数以百计的期货出售者渴望做成生意，他(她)将会降低报价 S_U 最终降到 $S_0 e^{rT}$(再加上可能发生的交易成本).

因此只可能发生的情形是 $S_U \leqslant S_0 e^{rT}$. 能否证明相反的情形 $S_U \geqslant S_0 e^{rT}$? 期货合约中存在不对称性，回答是肯定的，但是不适用于诸如石油、大豆、铜和烟草等商品. 让我们举一个例子.

假设在时间 T 我以价格 $S_D < S_0 e^{rT}$ 得到一股股票的期货合约. 我以价格 S_D 购买合约(并不需要立即支付)，同时以现价 S_0 卖空一股股票. 我以无风险利率 r 投资，在时间 T 我的投资增加到

$$S_0 e^{rT}$$

在该时刻我通过支付 S_D 给期货出售者，同时得到一股股票，然后将股票交付给卖空出售者清算头寸从而结束交易. 我将得到无风险的利润

$$S_0 e^{rT} - S_D$$

因此，如果股票期货的价格跌至 $S_0 e^{rT}$ 以下，大量期货的购买者选择从股票期货的出售者手中购买期货. 这样，期货价格趋向于 $S_0 e^{rT}$.

股票期货的价格

我们可以以每日或每小时为单位，给出未来 T 时刻到期的股票 S_t 的一系列期货价格．刚给出的公式只是应用性的，但我们也应知道距离到期日的时间，$T-t$，不断减少．那么，由 F_t 表示的一系列股票期货价格与股价存在下式关系：

$$F_t = S_t e^{r(T-t)} \tag{1-3}$$

注意：设股票期货的出售者已经确定某一公司，例如 Electrotech，陷入极度困境，以 $S_D < S_0 e^{rT}$ 出售期货．你买入一些期货并且按上述策略操作．Electrotech 如预期的一样跌破 S_D，比如说跌至 S_τ，你也会赢利，理论上你的赢利为 $S_0 e^{rT} - S_D$．期货出售者也赢利 $S_D - S_\tau$．那么，是谁遭受了损失？是持有你借来并卖空
13 股票的股票持有者．

表 1-1 芝加哥交易所(CBT)大豆报价

（合约单位：5000 蒲式耳，报价单位：美分/蒲式耳）

	开盘	最高	最低	收盘	涨跌	合约历史最高	合约历史最低	成交量
July	619	622.5	617.25	621.5	+2.25	753	611	56 563
Aug	610	613.5	609	613	+3.5	745	603	19 275
Sept	596.25	597.25	593	597	+4.25	723	587	6529
Nov	587	592.5	585.5	591.75	+5.25	717	580.5	48 282
Ja99	595.5	599	594.5	598.75	+6	701.5	588	4234
Mar	602	604.5	601.5	604.5	+4.75	694	595	1389
May	608	608	606	608	+4	671	600	408
July	612.5	615	610	614.5	+5.5	728	604	1026

注：估计成交量 44 000，前一交易日成交量 51 097；未平仓合约 139 005，+923．

表 1-2 纽约咖啡砂糖可可交易所(CSCE)咖啡报价

（合约单位：37 500 磅，报价单位：美分/磅）

	开盘	最高	最低	收盘	涨跌	合约历史最高	合约历史最低	成交量
July	124.25	125.75	122.30	124.85	+0.70	191.00	120.00	15 752
Sept	123.00	124.60	122.00	124.05	+0.60	186.00	122.00	8162
Dec	120.00	121.50	119.00	120.50	+0.30	157.50	119.00	7172
Mr99	116.00	117.50	116.00	116.50	+0.25	154.00	116.00	2919
May	114.70	115.25	114.00	114.50	+0.25	151.00	114.00	1162
July	113.25	113.50	112.75	112.50	+0.25	131.00	112.75	728
Sept	112.00	112.00	111.00	111.00	+0.205	123.00	111.00	688

注：估计成交量 10 326，前一交易日成交量 11 740；未平仓合约 36 583，+1580．

商品期货．如我们从表 1-1 和 1-2 所见，大豆和咖啡的期货价格不遵循 $S_0 e^{rT}$ 的规则．商品在两个重要方面不同于股票：

1．你无法卖空一蒲式耳的小麦．

2. 与股票不一样的是，新增加的当期农作物不断进入市场，增加了供给.

注意表 1-1 中，跨度 1998-1999 年度的大豆价格一路下跌，直到 1999 年 1 月合约(“Ja99”)开始回升. 市场存在对 1998 年农作物大丰收的预期，价格表明“你可以以大大低于 6.19 $\frac{1}{2}$美元的现价买到所有你想要的豆类.”

3. 商品有储存成本，这会使得越晚交割的期货合约价格上涨，而不是下降.

我们给出一个股指期货的例子. 14

例 如下为 1998 年 6 月 8 日的收盘价(《华尔街日报》，1998 年 6 月 9 日，C18 版)

标准普尔 500 指数	1115.72
9 月份标准普尔 500 指数期货	1129.2
13 周短期国库券利率	4.995%
时间长度	102 天

由于

$$e^{0.0487425} = 1.049995 \qquad (每年收益)$$

我们得到标准普尔 500 指数期货的对应价值为

$$1115.72e^{0.0487425\times 102/365} = 1131.02$$

1.4 债券市场

现在美国债券市场的市值大约是 8000 亿美元(《巴伦周刊》，2000 年 6 月 12 日，MW77 版；联储数据库)，而美国股票市场的所有股票的市值大约为 150 000 亿美元(《华尔街日报》，1998 年 6 月 8 日，C1 版).

债券的基本形式是一项负债. 它反映了借贷人，亦即债券的出售者，在某一指定时间偿还借款以及约定利率的利息的承诺. 注意承兑票据都隐含了“承兑”的条款. 债券市场给需要资金的政府和公司与有钱可贷的投资者提供了一条相互需求的渠道. 债券市场提供了货币流动性，这对于经济健康运行是至关重要的.

证券公司的债券做市商充当中介，他们从卖方处购得债券并出售给购买者. 该项交易形成了债券的*一级市场*. 债券做市商也维持了一个活跃的*二级市场*. 做市商也从他们的库存中向希望购买的投资者出售已经发行的债券. 正如股票的情形，卖空债券也是可以的. 购买债券的有诸如保险公司、共同基金、养老基金和金融机构等机构投资者，以及个人投资者. 债券的交易同样非常活跃. 30 年国库券的平均持有期为两周.

每种债券均有*面值*，代表债券到期时投资者可以收到的总金额. 当债券被当作新发行的一部分而出售，它的价格是固定的.

债券有两种主要形式——贴现债券和附息债券

贴现债券，或零息债券，在到期日时仅仅支付买方债券的票面价值. 附息票债

[15] 券在到期日支付面值，同时在债券的整个生命周期还定期支付固定的票面利率.

例如，美国国库券的面值是 1000 美元的倍数. 它们到期期限可以从 2 年到 30 年. 典型的两年期的是附息债券，而 30 年期的是零息债券.

当债券被作为新发行的一部分出售，其价格由卖方所确定. 随后，在二级市场的价格会上下波动，部分地反映了利率的总体水平.

利率随一系列因素而变化：信用的供求变化、财政政策、联邦储备政策、汇率、经济环境，以及对于债券市场最重要的通货膨胀的预期的变化. **通货膨胀是指基本商品价格的持续上涨**. 这种基本商品价格的持续上升降低债券的价值，因为它降低了来自债券的固定支付的未来购买力.

债券市场常常因为担心通货膨胀加剧的缘故，而对积极的经济消息反应消极. 相反，消极的消息，例如失业率上升时，通货膨胀降低的预期会提高债券的价格. 当利率上升时，债券价格下降，因为其票面利率将不如新发行的相近质量的债券的票面利率. 如果利率下降，则债券的票面利率对于投资者更有吸引力，从而价格上涨.

1.4.1 收益率

当我们以不同于债券面值的市场价格购买债券的时候，三个指标常被用来衡量我们投资所得的收益率：

票面利率：以债券面值的百分比形式按年计算的定期支付.

当前收益率：以当前市场价格的百分比的形式计算的每年支付.

到期收益率：如果购买并持有至到期，债券支付的收益的百分比率.

到期收益率也许是收益率最好的衡量方法. 它通过贴现得到.

未来支付的贴现

不管如何坚定地承诺，一年后支付的 1000 美元的在今天并不值 1000 美元. 今天稍少于 1000 美元的钱通过安全的投资，一年后增长到 1000 美元.

为了精确地得到这一值，假设今天进行的投资价值 V，可以获得某一承诺的
[16] 年收益率 R. 我们可以把增加到 1000 美元的收入表示为 $Ve^R=1000$.

例 假设我们知道我们可以以几乎无风险的年 6% 的收益率投资，那么

$$Ve^{0.06} = 1000$$

$$V(1.062) = 1000$$

因此

$$V = 948 \text{ 美元}$$

被增长因子相除被称为贴现. 如果收入将在未来某一时间 T 发生而现在时间为 t，那么增长公式写成 $Ve^{(T-t)R}=P$，其中 P 是收入的大小. 如果我们知道投

资率 R，我们得到

$$V = e^{-R(T-t)}P \tag{1-4}$$

对于债券，到期收益率是比率 R，用它把债券未来所有收入贴现到现在就得到债券的现价．换句话说，公式(1-4)中只要我们知道现在的市场价值 V，我们就可以解出 R.

让我们在零息债券的情形下求解公式(1-4)．如果债券面值为 1，在时间 T 到期，那么我们可以根据其现价 $P(t, T)$可以计算 R：

$$R(t) = \frac{-\ln P(t,T)}{T-t} \tag{1-5}$$

计算息票利率的到期收益率没有简单的方法．如下为三种收益率相互的一些规律：

- 如果债券碰巧以低于面值发行，到期收益率总是大于当前收益，而当前收益又大于息票利率.
- 债券以高于面值的价格发行，则相反的情况也成立.
- 当债券以面值发行，其息票率与当前收益率、到期收益率相等.

1.4.2 美国债券市场

30 年期国债的到期收益率一般被认为是债券市场的主导利率．它反映出利率的走向.

短期国库券(T-bill)是期限在一年或一年以内的债务工具．它们的信誉由美国政府担保．国库券的二级市场规模庞大且流动性强，是一种低风险投资．长期和短期国库券都是通过拍卖由投资者购买．期限在 13 到 26 周的国库券每周一拍卖．期限为 52 周的国债券每隔四周在周四拍卖．长期国库券(bond)拍卖的次数没有那么频繁．例如，30 年期的国库券逢 2 月、8 月和 11 月初拍卖. 17

证券公司(承销商)在销售和分销债券和票据的时候充当了中间人的角色．证券公司为证券有效定价以及承销政府和公司发行债券的能力取决于他们为(金融)工具准确定价的能力．这些公司充当承销商和做市商；销售活动需要证券公司买卖证券．承销商和做市商是稳定债券市场运行不可或缺的机构．高流动性的债券市场要求可随时变现的资金来源.

回购协议(repos)是国债市场流动性的最重要来源．在典型的回购协议中，希望为持有债券融资的证券交易商将债券出售给持有现金的投资者，同时承诺晚些时候以商定的价格将它们购回．债券放于购买者处作为抵押．逆回购是相反的协议，购买者同意购买债券，而出售者同意在未来时间将其购回．这种回购协议可以根据顾客要求设计成任何期限，从一个晚上到一年.

回购市场产生的最初目的是证券交易商可以用来为持有债券筹资，直至今天，它仍然起到这个作用．发行在外的回购协议的数量相当巨大.

1.4.3 利率和远期利率

n 年期利率是指从现在起持续 n 年的投资的利率. 它是 n 年后到期的贴现债券或零息债券的收益率. 也可以指 n 年期零息债券的收益. 我们可以通过得到二级市场上零息债券的报价后，用公式(1-5)求出它的值.

远期利率是始于将来的时间段上的利率，它隐含在即期利率中.

例 假设1年期利率为8%，2年期利率为8.5%. 第二年的远期利率是把第1年的8%和第2年的8.5%结合起来的利率. 因为我们假设利率为连续复利，我们运用指数计算.

方法：我们用 $f(1,2)$ 表示远期利率. 我们投资100元. 第1年年末，它增长到 $100e^{0.08}$ 美元. 如果我们终止投资，在第2年重新投资，最终量为：

$$e^{f(1,2)}100e^{0.08} = 100e^{0.08+f(1,2)}$$

但是，2年期利率为8.5%，亦即，同样100美元应增长到

18 $$100e^{2\cdot 0.085}$$

根据无套利的规则，两个量必须一致. 我们取相等后得到：

$$100e^{2\cdot 0.085} = 100e^{0.08+f(1,2)}$$

那么

$$0.17 = 0.08 + f(1,2)$$

我们得到远期利率 $f(1,2)$ 为9%.

一般地，r_1 是 T_1 年的利率，r_2 是较长期限 T_2 年的利率，那么 T_1 和 T_2 之间的远期利率，由下式给出：

$$f(T_1,T_2) = \frac{r_2T_2 - r_1T_1}{T_2 - T_1} \tag{1-6}$$

1.4.4 收益率曲线

零息债券的收益率曲线是指对应于不同到期年限的零息债券收益率的图线. 付息债券也有一条相应地反映对应于它们期限的利率的曲线.《华尔街日报》每天刊登国债的收益率曲线. 图1-4为一个例子.

较长期限的收益率曲线一般较高. 零息债券的收益率曲线总是高于付息债券的收益率曲线. 付息债券在到期日之前产生现金收入. 这些收入由于贴现的幅度小于最终得到这些收入的贴现幅度，从而产生较低的收益率.

公式(1-6)可以重新表述为：

$$f(T,T_2) = s + (s-r)\frac{T}{T_2 - T}$$

这表明如果 $s>r$，那么 $f>s>r$，因此远期利率高于当期收益. 在这种情况下，如果我们让 T_2 趋近于 T，由此 s 趋近于 r，从时间 T 开始的非常短时间的远期利

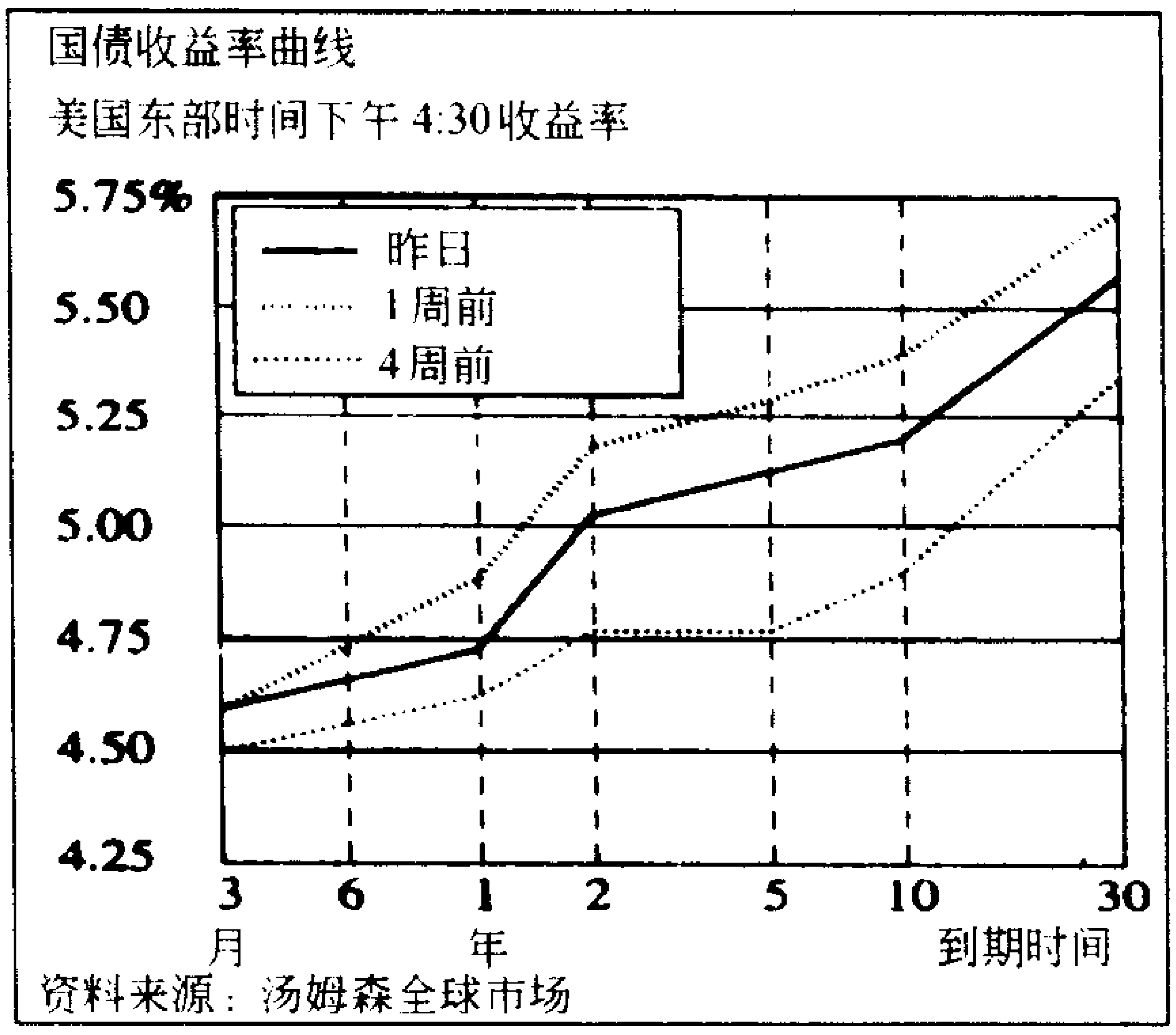


图 1-4　1999 年 3 月 11 日美国国债市场收益率曲线
（资料来源：《华尔街日报》，1999 年 3 月 11 日）

率是：

$$f(T,T)=r+T\frac{\partial r}{\partial T}$$

这称为到期日为 T 的瞬时远期利率.

1.5　利率期货

最常见的利率期货是在芝加哥交易所(CBOT)交易的国债利率期货．该合约保证购买者可以在交割的第一天能够获得距离到期日 15 年以上的政府债券．事实上，任何 15 年以内不能向政府交换现金的国债均可以用作该合约的交割.

国债以美元和 1 美元的 32 等分计价．报价针对面值为 100 美元的国债．报价“91-05”表示面值为 100 000 美元的国债的实际价格是 $100\ 000\times 91\frac{5}{32}\div 100=91\ 156.25$．报价与购买者支付的现金价格并不相同．现金价格和报价的关系如下：

（现金价格）=（报价）+（从上一付息日到现在的应计债券利息）

国债期货的价格和国债一样报价．交割可以在交割月的任何时间进行.

交付债券的空方到期将收到现金，数量由债券转换因子决定．债券的转换因子与交割月第 1 天的债券价值相等．空方收到的现金等于

（期货报价）×（转换因子）+（债券应计利息）

应计利息对应于 100 美元面值而言.

在任何给定时间，大约有 30 种债券可以在芝加哥交易所(CBOT)的国债期

货合约中交割．考虑到不同票面利率和期限，范围非常广泛．空头方可以选择现有最便宜的债券用于交割．

为了交割而购买债券的成本为：

（报价）＋（从上一付息日到现在的应计债券利息）

1.5.1 期货价格的决定

19~20 如果已知用于交割的最便宜的债券和交割日期，对于国债期货合约的买方而言，其将买入的国债的未来收入是已知的．我们可以像在 1.4 节为股票期货定价一样确定期货合约的价格 F_t.

用 C 表示债券所有利息支付的现值．我们知道每一期利息支付的数额和时间，所以我们可以对每笔支付贴现得到其现值．设 P 为债券的现在价格，T 为期货合约到期的时间，t 为现在时间．

我们可以看到：

$$F_t = (P - C)e^{r(T-t)}$$

其中，r 是 T 和 t 之间适用的无风险利率．表达式 $P-C$ 的出现可以采用下面的投资选择而得到．

资产组合 A 包括一个在 t 时刻价值为 f 的债券期货合约，加上数量为 $Xe^{-r(T-t)}$ 的现金．

资产组合 B 包括一债券加上以无风险利率借贷的数量为 C 的资金．

债券的利息收入可以用于偿还借款，于是资产组合 B 在时刻 T 时与一单位的债券有相同的价值．资产组合 A 中，以无风险利率投资的现金在时刻 T 时将增长到 X，可以在时刻 T 时用来购买期货合约．因此两个资产组合在时刻 T 时都仅包含一单位债券．无套利原理表明它们在 t 时刻必有相同的价值．

$$f + Xe^{-r(T-t)} = P - C$$

或者

$$f = P - C - Xe^{-r(T-t)}$$

合约 F 的未来价值等于 $f=0$ 时的 X 的价值．

这样，我们得到

$$F = (P - C)e^{r(T-t)}$$

1.5.2 短期国库券期货

短期国库券的期限为 1 年或 1 年以下．持续期最短的短期国库券仅为 90 天．在国库券期货合约中，标的资产是 90 天到期的国库券．例如，如果期货合约 180 天到期，标的资产是 270 天的短期国库券．这些合约被认为是基于短期利率的合约．我们下面计算这样的合约的价格．

假设期货合约 T 年到期，标的国债的到期时间为 $T+\frac{90}{360}\left(=\frac{1}{4}\text{年}\right)=T_1$．用

r 和 r_1 表示期限为 T 年和 T_1 年的无风险投资的收益率．假设以短期国库券为标的的期货合约面值为 100 美元．其现值由下式给出：

$$V_0 = 100\mathrm{e}^{-r_1 T_1}$$

这是标的国库券的现值．因为合约在时刻 T 到期，并且资产不支付股利，我们看到期货价格 F 等于 e^{rT} 乘以资产价格． 21

这样

$$F = \mathrm{e}^{rT} V_0 = 100\mathrm{e}^{rT - r_1 T_1}$$

回顾公式(1-6)中 T 和 T_1 之间的远期利率 f，与 r 以及 r_1 存在以下关系：

$$f(T, T_0) = \frac{rT - r_1 T_1}{T - T_1}$$

这样我们可以重新表述期货价格 F 为

$$F = 100\mathrm{e}^{f(T, T_1)(T - T_1)}$$

该公式表明如果交割日当天 90 天利率等于当天的远期利率，远期合约的价格与短期国库券的价格相等．

1.6 外汇

远期合约和期权广泛应用于外汇风险的管理．当公司参与涉及外币支付的交易时，外汇风险就会出现．例如，一家德国公司向美国公司出售其产品，并且将于此后 30 天收到美元支付．美元需要兑换成德国马克．它收到的马克金额取决于到时候美元对德国马克的汇率．即使是收到已知量的美元，该公司还是处于风险的位置．

我们下面说明远期合约和期权在管理外汇风险和获得确定性现金流中的作用．该过程称为套期保值．

1.6.1 货币套期保值

假设 Ger Beta Hans(GBH)，一家德国公司，从现在起 6 个月后会收到 100 万美元．它需要将美元兑换成德国马克．如果该公司未进行套期保值，如果美国美元/德国马克的汇率上升，公司获益，因为他会获得更多马克．相应地，如果汇率下降，它将面临损失．

降低这种风险的最简单方法就是出售基于美元/马克汇率的远期合约．假设 6 个月的远期汇率是 1.4300，即 1.43 马克等于 1 美元．如果 GBH 出售价值 100 万美元的远期合约，它将得到保证在 6 个月之后收到对应于 100 万美元的 1 430 000马克．

如果接下来 6 个月中美元汇率下跌，GBH 公司将会免受损失；如果汇率上涨，GBH 不会获益，因为它已经锁定在每美元 1.430 马克的远期汇率．远期合约使 GBH 得到了每美元兑 1.43 马克的确定性，同时也有前期的成本或升水．然

22 而，由于合约是锁定的，GBH 不可能因美元/马克汇率的上升而受益.

除了远期合约外还有另外一种选择，GBH 可以选择购买美元的看跌期权/马克的看涨期权. 期权的标的资产可以是汇率. 例如，GBH 可以选择买入美元的看跌期权. 该期权使 GBH 拥有在 6 个月后卖出 1 美元收到 1.43 马克的权利.

该期权可以向 GBH 保证每美元卖价为 1.43 马克——如果汇率下降将得到保护. 如果汇率上涨到 1.43 以上，该期权可以变得无价值而不执行；该期权给予 GBH 出售的权利而没有必须卖出的义务. 因此公司到期时可以以即期汇率出售美元，每美元获得多于 1.43 的马克. 看跌期权允许 GBH 公司得到美元升值带来的好处.

看跌期权是有价格的. 执行价为 1.43 马克的 6 个月的美元看跌期权每美元也许会值 0.0466 马克. 将其换算成美元，再乘以 100 万，我们看到这将大约为 32 600 美元. 该项策略的盈亏平衡汇率是 1.4300－0.0466＝1.3844 马克/美元.

如果 GBH 知道 6 个月后汇率将低于 1.3844，那么它会买入看跌期权而不会消极等待的方法. 此外，如果汇率最后高于 1.4300＋0.0466＝1.4766，GBH 买入看跌期权将比买入远期合约更有利. 它完全能从汇率的上升中获益，然而买入远期合约的话就放弃了这种机会. 看跌期权的策略在汇率波动较大时表现最佳.

GBH 可以买入执行价格较低的期权. 这在为较大幅度的汇率波动提供保护的同时，也可以使成本较低. 与远期合约不同的是买入看跌期权需要前期支付. 这样买入看跌期权可以被认为是购买一项资产. 它向 GBH 提供实实在在的好处，但是它也带来了成本. 远期合约只是保证一定的汇率，因此并不增加公司的资产或负债.

1.6.2 计算货币期货价格

考虑如下涉及美元和马克的货币期货. 在时间 T，A 将交付 1 马克给 B. B 反过来会在那时支付 A 一定数量的美元. 那么期货合约的公平价格是多少？在时间 T，A 每马克向 B 要价多少？

今天的汇率	1 美元$=\alpha$ 马克
美元无风险利率	$=r_d$
德元无风险利率	$=r_m$

我们构造如下图表：

$$\begin{array}{cccc} T=0 & \text{美元 } 1 & \longleftrightarrow & \text{马克 } \alpha \\ & \downarrow & & \downarrow \\ \text{时间 } T & e^{r_d T}1 & \longleftrightarrow & e^{r_m T}\alpha \end{array}$$

23

我们进行如下推理. 我们有 1 美元，同时我们可以采取两种方法进行投资：

1. 我们可以根据美元利率投资，这种情形下 1 美元在时间 T 价值 $e^{r_d T}$ 美元.

2. 我们将 1 美元兑换成 α 马克，同时以德国马克利率投资. 这种情形下，在

时间 T 它值 $e^{r_m T}\alpha$ 马克.

我们可以采用任何一种投资，所以它们在时间 0 必须有相同的价值.（它们在时间 T 的价值可以相差很大）这样：

$$e^{r_d T} = e^{r_m T}\alpha$$

美元　　马克　　时间 0

如此，时间 T 时马克在今天的价值为 $e^{(r_d - r_m)T}/\alpha$ 美元，这就是期货合约的公平价格. 在实际中可以采用如下交易，A 可以借 $e^{-r_m T}/\alpha$ 美元，然后把它兑换成 $e^{-r_m T}$ 马克. 到时间 T，它可以增长到 1 马克. 在时间 T，他必须偿还美元为：

$$(e^{-r_m T}/\alpha)e^{r_d T} = e^{(r_d - r_m)T}/\alpha$$

这正是我们已经确定的公平价格. 注意到从 A 的角度看该交易是无风险的. 从 B 的角度它也是不错的，因为在时间 T 将不会发生任何出乎意料的事. 24

第2章 二叉树、资产组合复制和套利

先发制人

——孙武，《孙子兵法》

2.1 衍生产品定价的三种方法

正如我们在 1.2.2 节所述，股票(欧式)看涨期权是指在到期日的某一天买入股票的权利，而非义务. 购买价是事先商定的；它被称为执行价. 如 1.2.3 节所描述，股票(欧式)看跌期权是一种类似的权利，是在某一天出售股票的期权. 执行看跌期权并不需要持有股票.

表 2-1 福特股票期权交易报价

1997 年 11 月 15 日 $\left(\text{当前股票价格 } 28\frac{5}{8}\right)$

执行价	到期时间	成交量	看涨期权价格
27½	12 月	10	1⁹⁄₁₆
27½	3 月	…	…
30	11 月	1059	5/16
30	12 月	84	3/4
30	3 月	2100	1⅝
32½	12 月	59	1/4
32½	3 月	504	11/16
35	3 月	1055	5/16

资料来源：《华尔街日报》，1997 年 11 月 16 日

表 2-1 所示的是常见的某天交易的一系列某一股票的期权. 随着到期日的接近，期权价格下降；执行价离现价越远，期权价格越高. 期权的价格应该是多少呢?

例 看涨期权 我们有一股票，现价为 100 美元. 在一年以后，股价可以是 90 美元或 120 美元. 概率并未给定. 即期利率是 5%(1 美元今天投资，一年后值 1.05 美元). 一年之后到期执行价为 105 美元的股票期权的公平价格是多少?

我们会给出三种能够回答这个问题的方法. 第一种方法被称为博弈论方法，第二种是资产组合复制的方法，第三种是概率方法或期望价值方法. 一些读者可

能觉得我们并没有足够的信息回答该问题．他们是正确的．我们必须做出一些假设．这些假设是这些方法或解决问题的必要部分．第一个假设是股票在到期日的价格只能是两种特定价格中的一个，该假设对三种方法都适用．

2.2 博弈论方法

让 V＝期权的价格，S＝股票价格．我们可以构造如下资产组合：我们买入 a 股期权和 b 股股票．a 和 b 可以为负数．例如，如果 b 为负数，则表示我们卖空股票．让 Π_0＝在时间 t 为 0 时资产组合的价值．

$$\Pi_0 = aV + bS$$

这里 a 或 b 是未知的．

接着，我们将为在时间 $t=1$ 时的资产组合定价．根据我们的假设，在时间 $t=1$ 会有两种可能的状态(情景)，我们可以分别考虑．

$$(\text{上升状态}, S = 120\ \text{美元})\quad \Pi_1 = (120 - 105)a + 120b$$

120－105 项为什么出现？我们将期权转换为股票并且卖出股票．这种转换的成本是每股 105 美元，出售价是每股 120 美元．

$$(\text{下降状态}, S = 90\ \text{美元})\quad \Pi_1 = a \times 0 + 90b$$

25～26 问题好像没有什么进展，但是我们可以引进一个很聪明的手段．我们不能控制股票行情，但我们可以运用博弈论的技巧．

2.2.1 约减随机项

我们可以选择 a 和 b，使得 Π_1 并不取决于股价的涨跌结果．这样，我们有

$$(120 - 105)a + 120b = a \times 0 + 90b$$

该式可以导出等式 $15a = -30b$，我们作出 $a = +1$ 和 $b = -2$ 的投资选择．该项策略告诉我们应该卖出两股期权同时买入一股股票．我们这样做，结果就是确定的，我们可以忽略现实股票的涨跌．

2.2.2 期权定价

注意

$$\Pi_0 = -2V + 1 \times 100$$

以及

$$\Pi_1 = -15 \times 2 + (+1) \times 120 = 90$$

我们可能已经拿资金 Π_0 以 5％进行投资．所以该项投资的价值应该和股票期权交易的价值 Π_1 相等．

换句话说，

$$1.05\Pi_0 = 1.05(100-2V) = \Pi_1 = 90$$

这样，$100-2V=\frac{90}{1.05}$，所以 $V=7.14$.

2.2.3 套利

假设交易商愿意以 7.25 美元的价格出售(或购买)期权. 我们的定价方法告诉我们期权价格高估了. 所以，我们可以做以下事情：我们买入 1 股股票，卖出 2 股期权.

该头寸的成本是

$$100-7.25\times 2 = 85.50(\text{美元})$$

我们以短期利率借 85.50 美元一年.

$$r = 0.04879(\text{因此年率为 } e^r = 1.05)$$

我们买入 1 股股票，卖空 2 股期权，同时欠债 85.50 美元.

在 1 年末，我们将冲销该头寸. 股票-期权组合的净值为 90 美元. 我们欠债 $8.25\times 1.05=89.775$ 美元. 我们得到的利润(无风险)：

$$90-89.775 = 0.225(\text{美元})$$

绝对数值好像并不多，但是你应知道这是一项无风险的交易. 在现实生活中，你可以买入 100 万股股票而卖出 200 万股期权.

假设交易商以 7.00 美元的价格提供期权. 它们现在价格被低估了，因此我们采取逆向操作. 我们买入 2 股期权而卖出 1 股股票. 现在我们的净现金头寸为： 27

$$100-2\times 7 = 86(\text{美元})$$

我们以先前提到的短期利率 r 进行投资，我们买入 2 股期权，卖空 1 股股票，同时将 86 美元进行无风险投资. 在年末，86 美元的值为：

$$86\times 1.05 = 90.30(\text{美元})$$

我们以 90 美元的成本冲销期权-股票头寸. 我们剩下无风险的利润为：

$$90.30-90 = 0.30(\text{美元})$$

前面的计算告诉我们很重要的信息. 如果期权的价格偏离理论价格(一定幅度)，投资者或套利者可以利用这个机会通过大量买卖期权和股票赚取无风险利润. 如 1.2.1 节所讨论，这些行为将会影响价格. 这样，套利者将会驱使价格回到均衡位置. 即，他们会迫使期权的价格回到 7.14 美元. 正如第 1 章所讨论，市场反映非常快，我们可以认为任何可以套利的机会已经被利用了，以至再没有套利的机会.

在现实世界，股价并不服从二项模型，套利在有些情形下还是可能的.

2.2.4 博弈论方法——一般公式

我们现在重复先前的推导，以得到衍生产品定价的一般表达式. 我们假设我

们的股票在时间 τ 只有两个价值. 如果股票处于上涨的状态 S_u，那么衍生产品价格为 U；如果股票处于下跌的状态 S_d，那么衍生产品价格为 D(见图 2-1).

股价二叉树　　　　衍生产品价格

图 2-1　股价和衍生产品二叉树

我们通过买入 1 股衍生产品和卖出 a 股股票构造资产组合. 资产组合的初始价值是：

$$\Pi_0 = V_0 - aS_0$$

我们可以选择 a 的值使得资产组合的价值与股票的最终状态无关.

[28]
$$\text{上升时}: \Pi_u = U - aS_u$$

$$\text{下降时}: \Pi_d = D - aS_d$$

如果令：

$$U - aS_u = D - aS_d$$

那么，我们可以选择

$$a = \frac{U-D}{S_u - S_d} = \frac{\Delta V}{\Delta S}$$

比率 $\Delta V/\Delta S$ 在期权和衍生产品定价中起到至关重要的作用. 我们会再三遇到. 我们把 a 引入计算：

$$\text{资产组合的初始成本} = V_0 - aS_0$$

$$\text{资产组合的最终价值} = U - aS_u$$

因为该资产组合投资没有风险，并且无风险回报率是 r，我们一定有：

$$V_0 - aS_0 = e^{-r\tau}(U - aS_u)$$

我们解出该方程，得到衍生产品的定价公式：

$$V_0 = aS_0 + (U - aS_u)e^{-r\tau} \tag{2-1}$$

公式(2-1)给出了衍生产品的正确价格，因为如果 V_0 与价格不一致，将会有获得无风险利润的套利机会. 我们把详细的证明留给读者.

习题

1. 一股股票价值 10 美元. 一年以后，股票价格将变为 130 美元或者 100 美元. 假设相应的衍生产品的价值将为 $U=10$ 美元或 $D=0$ 美元. 即期的 1 年期无风险利率为 4%($e^{r\tau}=1.04$). 求 $t=0$ 时的衍生产品的价格.

2. 假设股票与习题 1 有相同的价值，利率为 4%. 假设衍生产品是执行价为 100 美元的看涨期权. 求在 $t=0$ 时看涨期权的价格.

3. 一股股票价值为 100 美元. 一年以后，股票价格将变为 130 美元或者 90 美元. 假设相应的衍生产品的价值将为 $U=0$ 美元或 $D=5$ 美元. 即期的 1 年期利率为 5%. 求 $t=0$ 时的衍生产品的价格. 该衍生产品为执行价为 95 美元的看跌期权.

4. 一股股票价值为 60 美元. 一年以后，股票价格将变为 75 美元或者 50 美元. 假设该衍生产品为执行价为 60 美元的看跌期权. 即期的 1 年期利率为 5%. 求 $t=0$ 时的看跌期权的价格.

2.3 资产组合复制

我们在 2.2 节介绍了一种很有用的技术，即两种资产的投资组合产生无风险的回报. 我们将介绍投资组合可以复制其他金融衍生产品的方法. 29

2.3.1 背景

与前面的介绍一样，我们设股票在时间 $t=0$ 的价格为 S_0，该股票在时间 $t=\tau$ 有两个可能的价格(见图 2-2).

图 2-2

市场上也存在股票的衍生证券 V，其价值在时间 $t=\tau$ 取决于 S 的表现. 如果 S 上涨，V 价值为 U. 如果 S 下跌，V 价值为 D. 今天 V 的公平价格是多少?

尽管(2-1)给出了 V 的价格，该价格是间接得到的，即通过构造一个无风险投资而得到. 我们可以通过采用一个资产组合复制的巧妙策略，得到有关衍生产品的价值的更多信息.

2.3.2 资产组合匹配

我们需要另外引入一个无风险资产，假设无风险资产的利率由 r 表示，我们可以以这个利率在市场上进行短期借贷. 我们假设债券的初值为 1 美元，并以这种形式表示债券的资金数额. 那么在时间 t 债券的价值将是 e^{rt}. 再设我们的资产组合 Π，包含了 a 单位的股票和 b 单位的债券. 资产组合在时间 $t=0$ 的价值 Π_0 就是

$$\Pi_0 = aS_0 + b$$

让我们计算时间 $t=\tau$ 时 Π 的价值. 我们的股票模型给出资产组合的两个未来价值.

$$\text{上升状态}: \Pi_\tau = aS_u + be^{r\tau}$$
$$\text{下降状态}: \Pi_\tau = aS_d + be^{r\tau}$$

我们再令

$$\begin{aligned} aS_u + be^{r\tau} &= U \\ aS_d + be^{r\tau} &= D \end{aligned} \tag{2-2}$$

因此，我们资产组合的价值 Π 和衍生证券的价值一致. 该资产组合复制了衍生证券 V. 因为该资产组合和衍生证券在时间 $t=\tau$ 有相同的价值，它们今天应该有相同的价值. 毕竟，它们在未来的时间里价格是没有差异的. 我们得出结论：

30

$$V_0 = aS_0 + b$$

只要用公式(2-2)我们解出 a 和 b，V_0 的表达式就会有一个显性的形式. a 和 b 可以用如下两个线性方程加以表示：

$$\begin{aligned} a &= \frac{U-D}{S_u - S_d} \\ b &= \left(U - \frac{U-D}{S_u - S_d}S_u\right)e^{-r\tau} \end{aligned} \tag{2-3}$$

尽管这些表达式看上去很复杂，它们在计算资产组合的价值时是比较简单的. 结合上面三个表达式，我们得到：

$$V_0 = aS_0 + (U - aS_u)e^{-r\tau}$$

它就是前面的定价公式(2-1). 我们特别需要关注的是 V_0 的表达式(就是 $aS_0 + b$).

$$V_0 = \frac{U-D}{S_u - S_d}S_0 + \left(U - \frac{U-D}{S_u - S_d}S_u\right)e^{-r\tau}$$

如果将 U 项和 D 项分开，得到

$$\begin{aligned} V_0 &= U\left(\frac{S_0}{S_u - S_d} + e^{-r\tau} - \frac{S_u}{S_u - S_d}e^{-r\tau}\right) + D\left(\frac{-S_0}{S_u - S_d} + \frac{S_u}{S_u - S_d}e^{-r\tau}\right) \\ &= e^{-r\tau}U\left(\frac{e^{r\tau}S_0}{S_u - S_d} - \frac{S_d}{S_u - S_d}\right) + e^{-r\tau}D\left(\frac{S_u}{S_u - S_d} - \frac{e^{r\tau}S_0}{S_u - S_d}\right) \end{aligned}$$

这里有一些值有特定的含义. 忽略指数项，U 的系数是：

$$q = \frac{e^{r\tau}S_0 - S_d}{S_u - S_d}$$

D 系数是：

$$\frac{S_u - e^{r\tau}S_0}{S_u - S_d}$$

就是 $1-q$. 所以我们资产组合的价值简化为

$$V_0 = e^{-r\tau}[qU + (1-q)D] \tag{2-4}$$

注意公式(2-4)和(2-1)的相似之处．我们的结果与 2.2.4 节是一致的．然而，我们是运用股票和现金的组合模拟衍生产品的价格行为．正如我们将在 2.6 节将会见到，公式(2-4)对应的方法可以应用于多个时期的价格模拟．

如果我们将 2.2 节中的数据，应用公式(2-4)进行计算，结果仍然是 7.14 美元．

2.3.3 期望价值定价方法

公式(2-4)说明资产组合的现值是由对未来资产组合价值的平均值贴现($e^{-r\tau}$被认为是贴现因子)得到的．实际上，如果我们能证明 $0\leqslant q\leqslant 1$ 条件，q 的表达式 31
可以作为概率．让我们再来看 q 的值：

$$q = \frac{e^{r\tau}S_0 - S_d}{S_u - S_d} \tag{2-5}$$

如果 q 为负数，那么该股票将是一笔好买卖．(2-5)中的分子为负数，所以

$$e^{-r\tau}S_0 < S_d$$

股票未来表现最差时的价值 S_d，也超过我们在债券市场上投资 S_0 美元所得到的回报．注意到债券回报是 $e^{-r\tau}S_0$ 美元．这将被认为是稳赚钱计划，即套利的又一例子，我们相信现实世界不会存在这样的好事．$1-q$ 的值为负数的情形同样是不现实的．由公式(2-4)之前的表达式知：

$$1 - q = \frac{S_u - e^{r\tau}S_0}{S_u - S_d}$$

并且如果分子为负数，该股票将变得没有价值．因为在这种情形下，股票的最佳未来价值，S_u，也低于我们在债券市场上投资 S_0 美元所得到的回报．没有任何理由买入这样的股票．再次，现实的市场不会存在这样的股票行为．

所以假设 q 满足概率条件是现实的，同时这也促使我们可以将公式(2-4)中简单资产组合的价值重新表述如下：

$$\begin{aligned} V_0 &= e^{-r\tau}[qU + (1-q)D] \\ &= e^{-r\tau}E_q[V_1] \end{aligned} \tag{2-6}$$

公式(2-6)中的下标表示，我们用来计算的概率是由公式(2-5)给出的有特定意义的无套利定价概率，q，也称为风险中性概率．

2.3.4 如何记忆用来定价的概率

记忆期望价值定价的 q 值的最好方法是考虑最简单的单期投资：买入一股股票．该过程由图 2-3 的二叉树图给出．

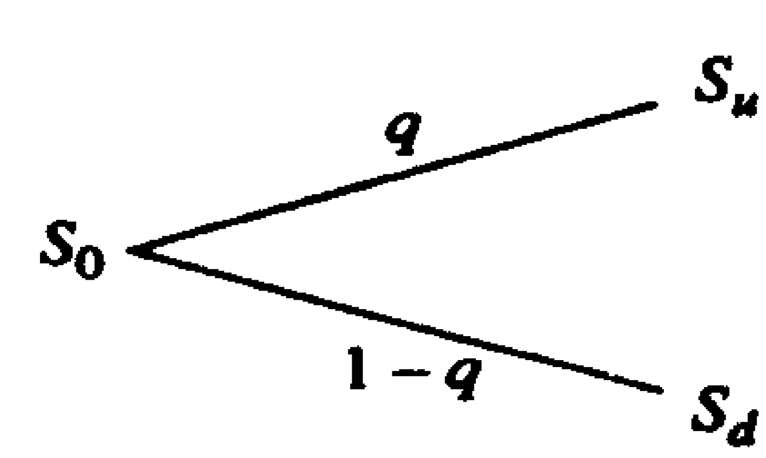


图 2-3

即使我们已经知道 V_0 的价值就是 S_0，我们也可以由公式(2-6)得到期望价值公式．根据公式，我们必须有：

32 $$e^{rT}S_0 = qS_u + (1-q)S_d \tag{2-7}$$

尽管(2-7)仅仅是一个期望价值的例子，但这对于理解 q 的作用是最重要的. 花一些时间解出公式中的 q. q 的公式与(2-5)式中的 q 一致. 你可以意识到只要给出股票的 3 个参数和利率，利用该二叉树就可以计算定价概率.

例 股票现在的价值为 50 美元. 一年后，它的价值可能是 55 美元或 40 美元. 一年期利率为 4%.

假设我们希望计算两种看涨期权的价格，一种执行价为 48 美元，另一种执行价为 53 美元. 我们也希望为一执行价为 45 美元的看跌期权定价.

我们怎么样运用公式(2-6)迅速求出这三个价格?

第 1 步：从股票二叉树(图 2-4)得到 q.

由公式(2-7)知：

$$1.04 \times 50 = 55q + 40(1-q)$$

从 $52 = 55q + 40(1-q)$

我们得到

$$12 = 55q - 40q = 15q$$

所以

$$q = \frac{12}{15} = 0.8$$

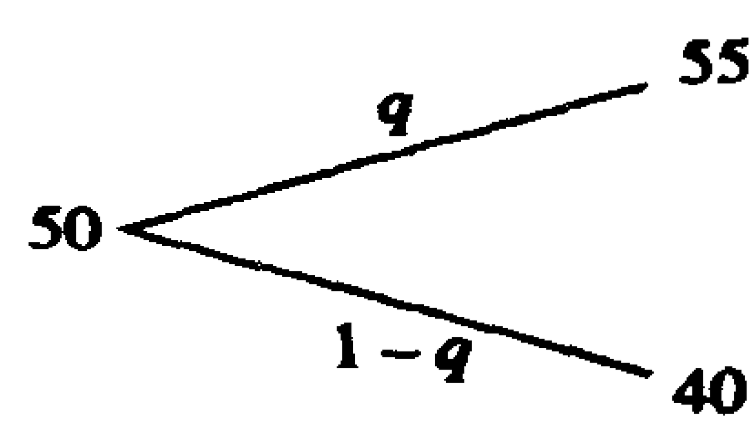


图 2-4

第 2 步：对衍生产品价值 U 和 D 求平均.

1. 如果看涨期权执行价为 48，那么 $U=7$ 以及 $D=0$，看涨期权的价格为：

$$\frac{1}{1.04}[q \times 7 + (1-q) \times 0] = \frac{5.6}{1.04} \doteq 5.38(\text{美元})$$

2. 如果看涨期权执行价为 53 美元，那么 $U=2$，看涨期权的价格为：

$$\frac{1}{1.04}(0.8 \times 2 + 0) = \frac{1.6}{1.04} \doteq 1.54(\text{美元})$$

3. 如果看跌期权执行价为 45，那么 $U=0$ 以及 $D=5$，看跌期权的价格为：

33 $$\frac{1}{1.04}(0 + 0.2 \times 5) = \frac{1.0}{1.04} \doteq 0.96(\text{美元})$$

除了 q 值之外，另一个重要的量也值得记住. 在本节我们集中讨论了匹配或复制其他股权的资产组合，其关键思想就是持有适当量的某一股票. 公式(2-3)表明应持有的股数为：

$$\text{股数} = \frac{U-D}{S_u - S_d} \tag{2-8}$$

该值正是在博弈论方法(2.2.4)中出现的 a.

注意该值的含义是指，被复制的股权的变化与股价变化之比. 在投资决策过程中，该比率称为德尔塔量. 你会看到定价概率 q 和德尔塔量会多次出现在以后的资产组合行为计算中.

2.4 概率方法

让我们从现实的市场特征情景开始. 我们已知股价为100美元，将来上涨时价格为120美元，下跌时价格为90美元. 假设我们观察一年的市场行为. 股票上涨的概率 p 的合理选择(见图2-5)，是使股票的期望回报大致在15%左右. 该回报比我们将100美元投资于安全的银行账户要高得多，以下计算说明何以如此.

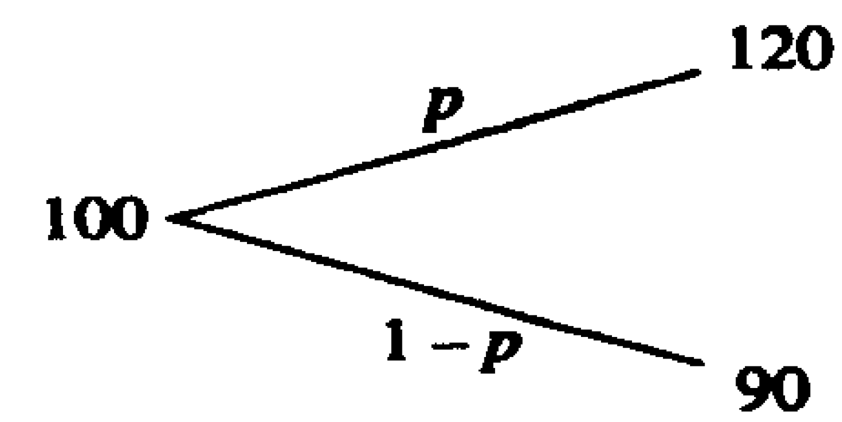


图2-5 股价二叉树

与该期望收益率相匹配的近似的 p 值为 $p=0.90$. 该回报看起来非常吸引人. 期望回报由下式给出：

$$E(P)=0.9(120-100)+0.1(90-100)=17(\text{美元})$$

注意到尽管每年的期望回收益率是17%，但是存在一些不确定性. 因为涉及到的仅仅是一个可能的成功，我们应知道：

90%的情况你赚20美元

10%的情况你赔10美元

在这些情况下，很多投资者会买入股票. 股票价格较大概率的上升可以抵消小概率的损失，因此该项投资选择对于那些可以承担一定损失的风险是吸引人的.

然而，每个投资者是不同的. 我们如何决定该股票合理的风险和报酬? 这个问题似乎没有答案. 我们引入一个假想的投资者(Hypothesis Investor)，从此以后称为H. I.，他有如下特征： 34

1. H. I. 为风险中性投资者；这与保守型投资者有很大差异. 一位风险中性的投资者是风险无差异的，即对于他来说，确定得到1美元的投资并不比期望值为1的不确定性投资更有吸引力. 大多数人并非风险中性. 保险行业正是由于这一特点而得以存在.

2. 对于H. I. 而言，上面介绍的股票和无风险投资之间是没有差异的.

基于这些假设，图2-5显示的股票模型中的 p 值为多少时，可以使得5%的股票回报(0.05)对于投资者具有相同的吸引力呢?

如果我们构造一个包含1股股票的资产组合 Π，那么 $\Pi_0=100$ 美元，并且一年以后：

$$E[\Pi_1]=120p+90(1-p)=30p+90$$

如果我们仅仅以无风险利率投资100美元，那么那项选择在一年末的价值将为105美元. 风险中性的H. I. 将这些投资等同看待. 即：

$$30p+90=105$$

从而：

$$p = 0.5$$

重要说明. 我们刚求出的 p 值并不一定和投资者的观点以及股票市场涨跌的实际概率相对应. 它仅仅是一个产生与无风险回报相等的股票回报(从假想的角度而言).

现在，让我们用该 p 值计算股票看涨期权的期望价值. C 为我们的看涨期权的价格，前面已给定执行价为 105 美元.

那么

$$\begin{aligned} E[C] &= p(120-105)^{+} + (1-p)(90-105)^{+} \\ &= 0.5 \times 15 + 0.5 \times 0 = 7.50(\text{美元}) \end{aligned}$$

然而，我们支付看涨期权发生在现在，一年后才收到看涨期权的偿付，因此我们应该对看涨期权的期望收益贴现. 这样我们得到价值为：

$$E[C]/1.05 = 7.50/1.05 = 7.14(\text{美元})$$

令人惊讶的是，这正是我们用博弈论方法和资产组合复制方法计算的价格.

习题

1. 一单位的股票价格为 90 美元. 一年以后股票价格将为 105 美元或者 80 美
35 元(未给定概率). 即期(在时刻 0 的)无风险利率为 4%，运用第 2.2.4 节的博弈论方法为一年后到期、执行价为 110 美元的股票看跌期权定价.

2. 一单位的股票价格为 110 美元. 一年以后股票价格将为 102 美元或者 122 美元(未给定概率). 即期(在时刻 0 的)无风险利率为 4%，运用期望价值公式(2-6)为一年后到期、执行价为 110 美元的股票看跌期权定价.

3. 运用第 2.2.4 节和 2.3.2 节的方法和解决方案，说明期权定价的博弈论方法和期望价值方法是等价的.

提示：从期权的博弈论方法开始，假设期权的价格为 U 和 D，运用 V 的博弈论答案，说明你的公式正好与贴现的期望价值一致.

4. (a)考虑习题 1 中由博弈论方法计算的看涨期权价格. 通过数字例子说明(i)较高的看涨期权价格会创造套利机会；(ii)较低的看涨期权价格会创造套利机会.

(b)考虑习题 1 中由博弈论方法计算的看跌期权价格. 通过数字例子说明(i)较高的看跌期权价格会创造套利机会；(ii)较低的看跌期权价格会创造套利机会.

5. 假设 X 为常量，衍生产品的未来价值为 $U=S_u-X$ 或者 $D=S_d-X$. 运用期望价值公式证明

$$V_0 = S_0 - e^{-rT}X$$

6. 一单位的股票价格为 100 美元. 一年以后股票价格将为 115 美元或者 90 美元. 即期无风险利率为 4%.

(a)运用期望价值公式(2-6)为一年后到期、执行价为 95 美元的看跌期权

定价.

(b)假设另一衍生产品的未来价格为 $U=0$ 和 $D=15$ 美元其中之一. 解释为什么是 V_0 是(a)中期权价格的 3 倍.

本章结束后的习题中有关于该内容的更多练习.

2.5 风险

风险在投资领域中扮演着重要角色. 风险可以购买、出售或者打包. 一般地，期权交易商喜欢控制风险或将风险最小化. 让我们看看在二项式模型中他们如何达到目的. 我们将通过一个例子说明这种方法. 交易商将为头寸套期保值，或者对冲风险.

例 假设 Flash Inc. 公司的股票以 60 美元出售. 它一年以后的价格表现包括在图 2-6 的二项式模型中.

图 2-6 Flash Inc. 股价的二项式模型 36

交易商期望提供一个执行价为 65 美元、一年后到期的看涨期权. 无风险利率为 0.048. 公式(2-1)中输入的值为:

$$S_0=60 \qquad U=15 \qquad r=0.048$$

$$S_u=80 \qquad D=0 \qquad \tau=1$$

$$S_d=50$$

首先，我们计算 V_0.

$$a=\frac{U-D}{S_u-S_d}=\frac{15}{30}=\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} V_0 &= aS_0+(U-aS_u)e^{-r\tau} \\ &= \frac{1}{2}\times 60+\left(15-\frac{1}{2}\times 80\right)e^{-0.048} \\ &= 6.16(\text{美元}) \end{aligned}$$

交易商的报价为 6.35 美元卖出看涨期权，6.00 美元买入. 6.35 美元和 6.00 美元之差称为交易商的差价.

一客户以每股 6.35 美元的价格购入 100 000 股的看涨期权(用期权市场的术语是 1000 手看涨期权). 交易商现在持有一个风险很大的头寸. 她决定通过购买股票对冲风险. 她该买多少呢?

答案: 她应该买 $\Delta\times 100\ 000$ 股股票，其中

$$\Delta=\frac{U-D}{S_u-S_d}=\frac{1}{2}$$

(该计算应该很熟悉.)因此，她以 3 000 000 美元的成本买入 50 000 股股票. 注意到她通过看涨期权收到

$$6.35 \times 100\ 000 = 635\ 000(\text{美元})$$

这促使她以 0.048 的利率借入 2 375 000 美元用于购买股票. 该交易商有没有受到避免风险的保护? 让我们应用前面的知识来分析.

情形 1：股价上升到 80. 交易商的股票值 $80\times50\ 000=4\ 000\ 000$ 美元. 她欠 $15\times100\ 000=1\ 500\ 000$ 美元赎回看涨期权、$2\ 375\ 000\times e^{0.048}=2\ 493\ 750$ 美元赎回贷款. 这样，她的最终净头寸为：

$$4\ 000\ 000-(1\ 500\ 000+2\ 493\ 750)=6250(\text{美元})$$

所以，在这种情形下，她赢利 6250 美元.

情形 2：股价下跌至 50. 交易商的股票现在值 $50\times50\ 000=2\ 500\ 000$ 美元. 看涨期权没有价值不执行，因此她在这里没有负债. 但她必须赎回贷款，价格为：

37 $$2\ 375\ 000\times e^{0.048}=2\ 493\ 750(\text{美元})$$

这样，她的最终净头寸为：

$$2\ 500\ 000-2\ 493\ 000=6250(\text{美元})$$

那么，在这两种情形下，她赢利 6250 美元.

精明的读者会注意到我们在情形 2 中我们本来可以走捷径，因为

$$2\ 500\ 000=4\ 000\ 000-1\ 500\ 000$$

贷款支付在两种情形下相同.

刚刚展示的套期保值的技术称为德尔塔套期保值. 我们在第 3 章和第 5 章还会遇到. 德尔塔套期保值在华尔街的现实世界中每天要被用上数百次. 它是在期权领域降低风险的标准工具.

习题

1. 你是一个期权交易商. 给定股票价格的二项模型，你在下述情况下卖出看涨期权：

S_0	S_u	S_d	X	r	τ	股数
50	60	40	55	0.55	$\frac{1}{2}$	1000

(a)计算看涨期权的公平市场价格.

(b)假设你以公平市场价格 +0.10 美元卖出 1000 股期权，你需要买入多少股股票进行套期保值?

(c)不依赖于股价结果的利润是多少?

2. 假设你作为期权交易商卖出 5000 股执行价为 50、期限为 3 个月$\left(\tau=\frac{1}{4}\right)$的看跌期权，其他条件与练习 1 相同.

(a)计算看跌期权的公平市场价格.

(b)你需要买入多少股股票进行套期保值?

提示：Δ 将是负数，意味着你会卖空一定量的股票.

(c)假设你以公平市场价格+0.12 美元卖出期权，利润为多少?

3. 本道题目采用习题 1 和 2 的模型. 给出以下数据：

	类型	S_0	S_u	S_d	X	r	τ	股数 N
(a)	看涨期权	80	90	75	80	0.048	1	2000
(b)	看跌期权	80	90	70	75	0.05	1/2	1000
(c)	看涨期权	70	80	50	55	0.046	1/4	2000
(d)	看跌期权	40	45	30	40	0.05	1/2	6000
(e)	看涨期权	64	72	60	66	0.047	1/3	4000
(f)	看跌期权	24	30	20	22	0.05	1	3000

(a)计算看涨期权或看跌期权的公平市场价格.

(b)求出需要买入或卖出多少股股票进行套期保值?

(c)假设你以公平市场价格+0.10 美元卖出看跌期权或看涨期权，求出不依赖于股票表现的利润. 38

2.6 多期二叉树和套利

在下一章，我们将详细探讨多期二叉树，在开始之前，让我们先看两期的情形. 我们的模型是股价变动两次，与前面一样，每次变动仅有价格上升和下降两种状态.

第 1 步 包括股价从 S_0 到 S_u 或 S_d 的变动. 但我们专门将这些值定义为：

$$S_u = uS_0 \text{ 和 } S_d = dS_0$$

其中两个固定的参数满足下面要求：$u>1$ 和 $d<1$.

第 2 步 从第 1 步的两个状态中的一个开始，继续保持与第 1 步相同的规律变动. 即股票可能以 u 因子增长，以 d 的因子下降. 图 2-7 总结了这两步的四种可能的最终结果.

因为 $ud=du$，我们可以通过将它表示为图 2-8 来简化二叉树.

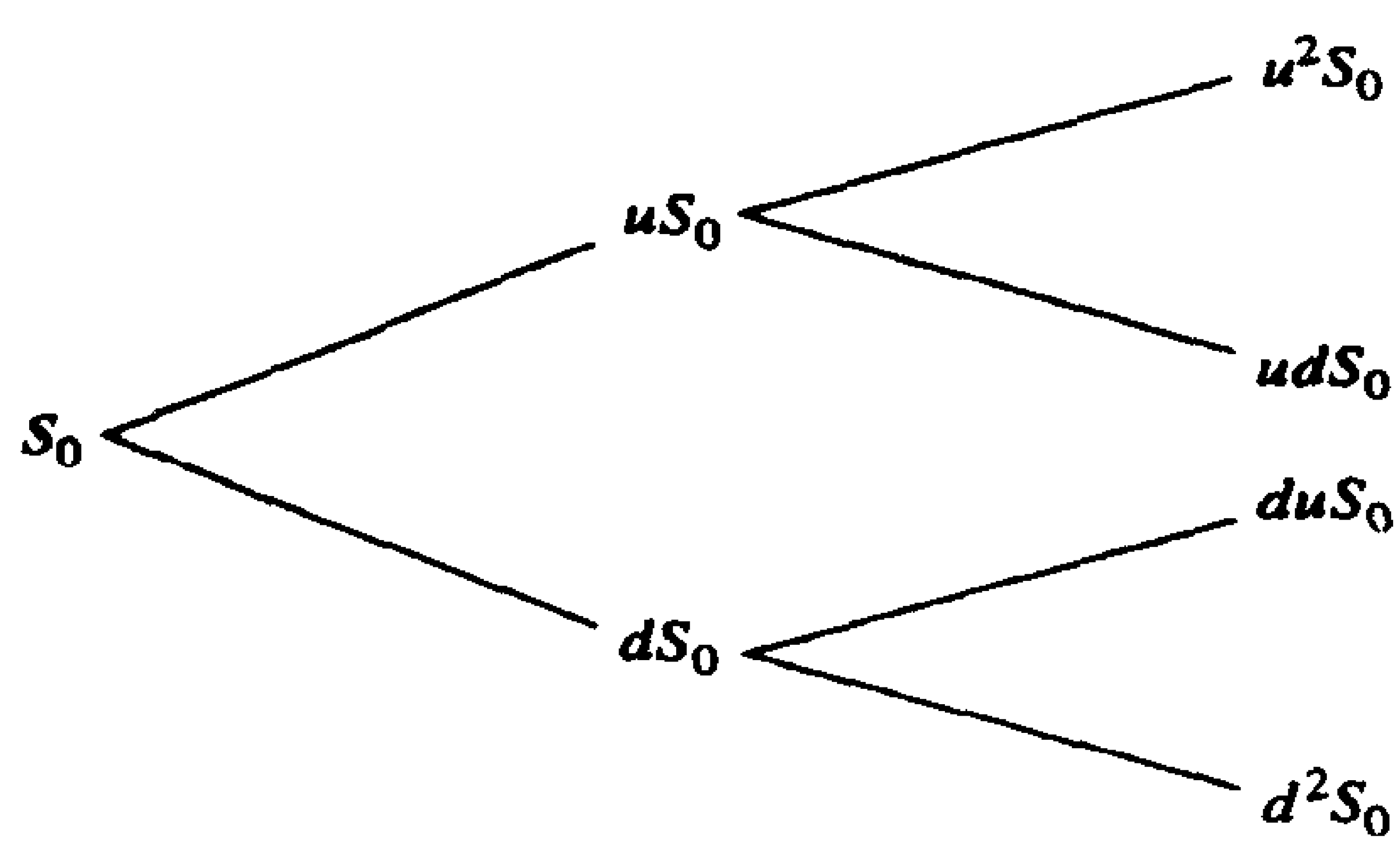


图 2-7 两期的二项式模型

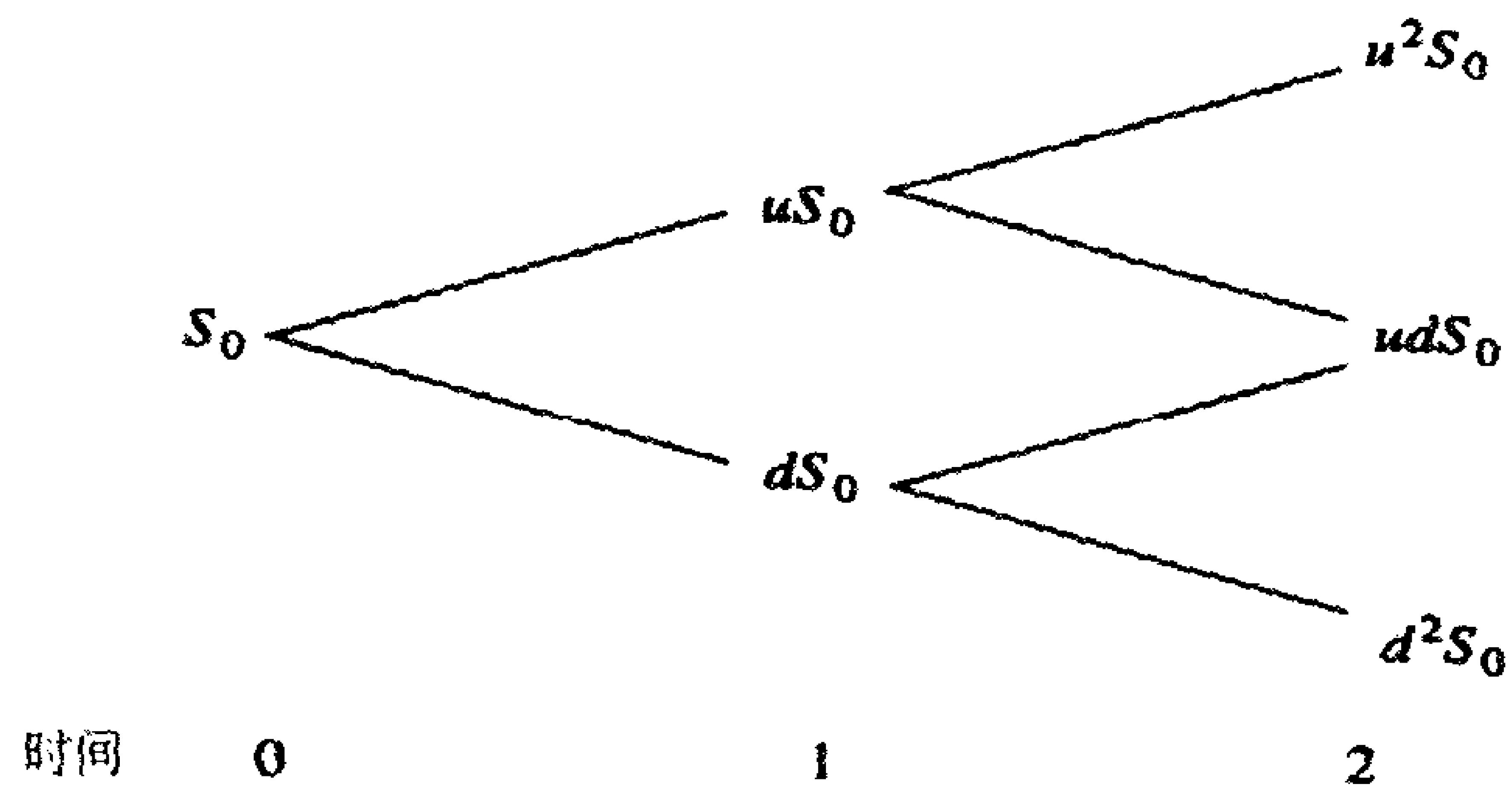


图 2-8 简化的股票二叉树

现在假设一项金融衍生产品对于股票二叉树中的每一个最终结果都有一个特定的价格．三种可能的价格将是 U、M 和 D，分别对应股票价值 u^2S_0、udS_0 或
39 d^2S_0．这些结果由图 2-9 给出．

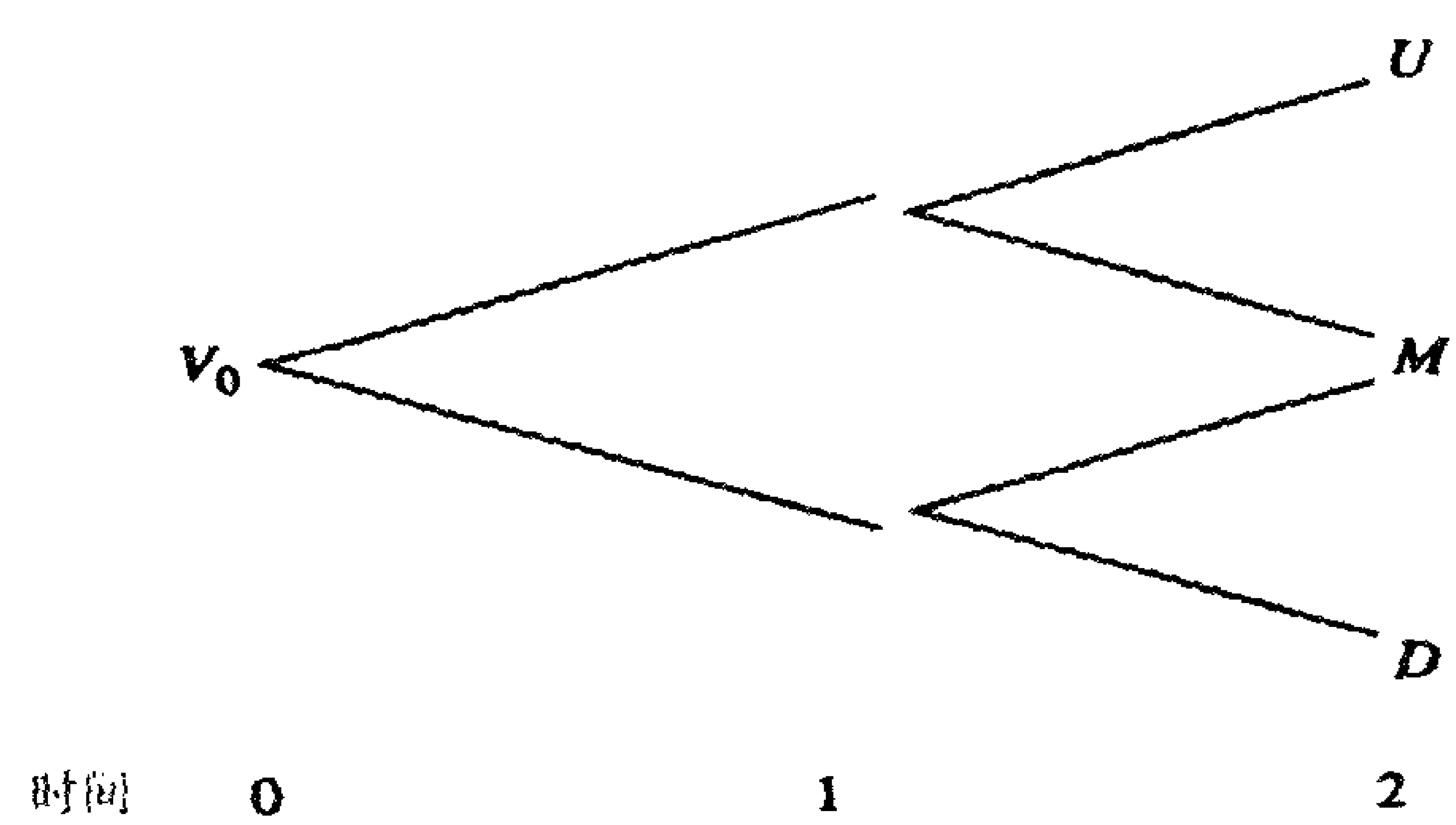


图 2-9 两期二项式模型的衍生产品二叉树

我们如何得到衍生产品的价格 V_0？关键是要找到衍生产品在时间 $t=1$ 的可能价格．假设我们有这些价格，X 和 Y．那么，我们就可以转化为图 2-10 所显示的二叉树问题．而该问题我们可以运用第 2.2 节到 2.4 节的任何方法解决．公式(2-1)表明：

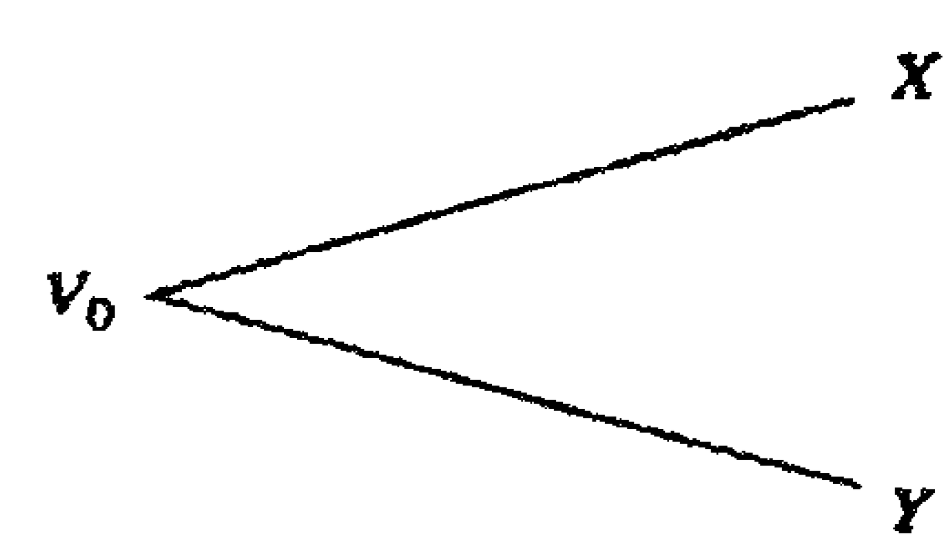


图 2-10 衍生产品二叉树

$$V_0 = aS_0 + (X - aS_u)e^{-rt}$$

其中

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta S} = \frac{(X-Y)}{(uS_0 - dS_0)}$$

很清楚，只要知道 X 和 Y，包括 V_0 的每个量都可以确定．

下面是求解 X 的方法．考虑图 2-11 所示的股价上升为 uS_0 和衍生产品价格

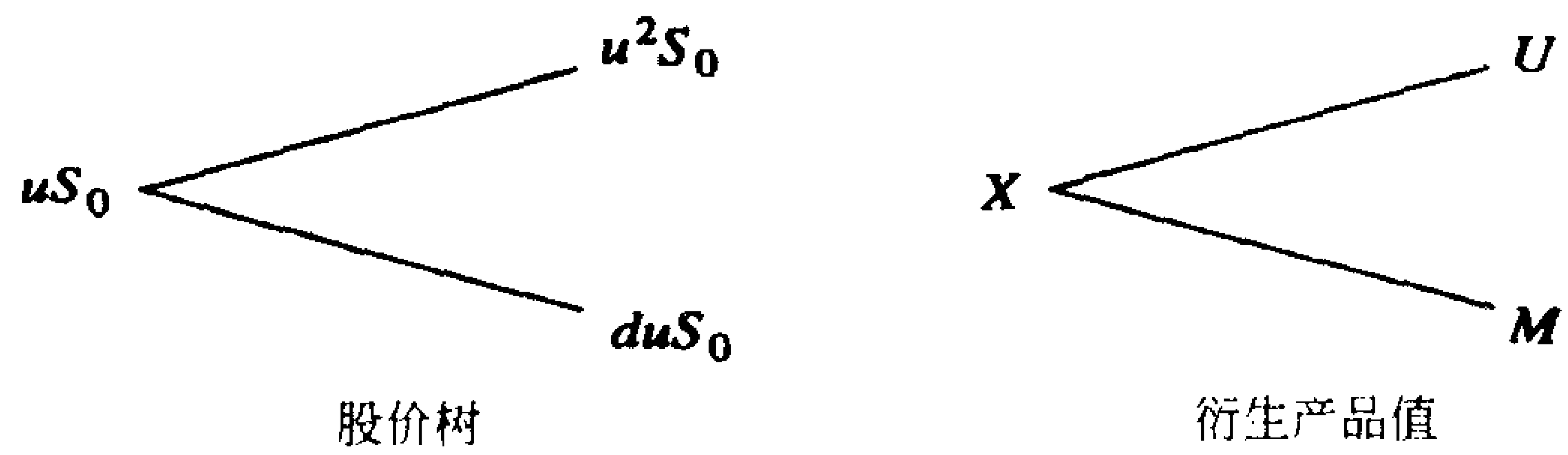


图 2-11 两期二项式模型的部分股票和衍生产品二叉树

为 X 所对应的状态. 在该状态下，股票再次从其初始价值 uS_0 上升或下降，与每一股票价格对应的两种可能的衍生产品的价格已知. 我们运用公式(2-1)计算在这种情形下衍生产品的公平价格 X 的值.

当初始股价为 dS_0 时，衍生产品的两种可能价格为 M 和 D，Y 的计算可以通过与上面相似的二叉树进行. 总结一下，我们计算了中间价格并且用这些值得到了 V_0. 我们将在下一章中对这些步骤进行系统性介绍. 40

2.7 附录：套利方法的局限性

我们刚介绍了资产组合复制的方法，在无套利下可以准确地决定期权的价格. 在二项式分布假设下，该方法将看上去的一个随机情景转换成确定的情景. 然而，股票只有两种可能价格是非常不现实的. 我们能否将该方法扩展到图 2-12 所示的有三种价格的股票的情况. 答案是否定的(除非作一些不合理的假设). 让我们分析其中的原因.

假设投资组合由下面资产构成：

a 单位的股票 S

b 单位的债券(价格为 1 美元,利率为 r)

在时刻 $t=0$ 资产组合的价值为：

$$\Pi_0 = aS + b$$

我们现在将时刻 $t=1$ 资产组合的价值设定为与三种情形下期权的价值相等.

向上情形 $aS_u + be^r = U$

中间情形 $aS_m + be^r = M$

向下情形 $aS_d + be^r = D$

我们希望解出 a 和 b. 但是一般那是不可能的，因为我们要满足的方程为 3 个，而未知数仅 2 个. 也就是说，我们需要一个三维空间来解决问题，而我们只有两维空间.

然而，问题并不就是一筹莫展了. 观察表明我们应该再增加一个金融工具. 让我们从增加一个有不同利率的债券开始，我们的新资产组合包括：

a 单位股票 S

b 单位债券 1(价格为 1 美元，利率为 r)

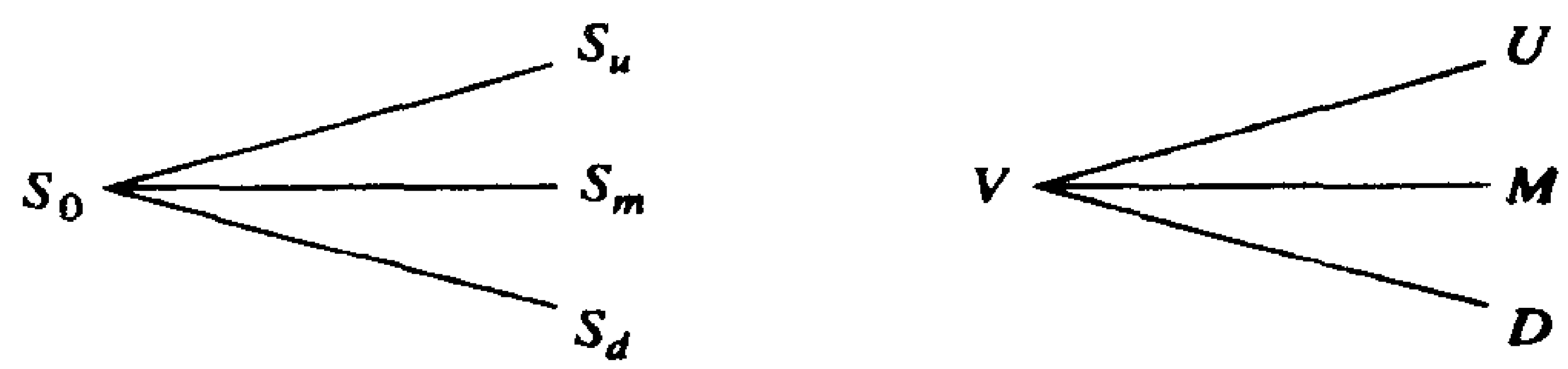
c 单位债券 2(价格为 1 美元，利率为 R)

我们再次在三种情形下设定时间 $t=1$ 资产组合的价值.

向上情形 $aS_u + be^r + ce^R = U$

中间情形 $aS_m + be^r + ce^R = M$

向下情形 $aS_d + be^r + ce^R = D$



股价树 期权树

41

图 2-12 三项式模型

现在我们有三个方程和三个未知数. 但是看 3 个方程中左边的第二、三项，它们都是相同的. 因此，一般来说，我们还是无法解出 a、b 和 c. 我们的解决空间仍是二维的(列向量空间为二维)，而我们需要三维.

我们还有一个策略. 让我们增加另一个股票 P，它在时间 $t=1$ 也有三个价值 V_u、V_m 和 V_d，我们的新的资产组合包括：

a 单位股票 S

b 单位债券(价格为 1 美元，利率为 r)

c 单位股票 P

我们设定时刻 $t=1$ 的资产组合价值，同时我们作如下

近乎苛刻的假设

1. 当 $S \to S_u$ 时，$P \to P_u$

2. 当 $S \to S_m$ 时，$P \to P_m$

3. 当 $S \to S_d$ 时，$P \to P_d$

这样，在三种情况下，资产组合的价值变为：

$$aS_u + be^r + cP_u = U$$

$$aS_m + be^r + cP_m = M$$

$$aS_d + be^r + cP_d = D$$

我们现在有三个独立方程和三个未知数，所以我们可以解出 a、b 和 c. 这样，我们可以确定资产组合的初始价值：

$$\Pi_0 = aS + b + cP$$

回头来看前面近乎苛刻的假设，我们获得了的胜利并不令人满意. 首先，如果我们想要为福特的期权定价，我们必须动用另外的股票，例如国际纸业，这显然并

不合理. 第二，我们需要假设福特和国际纸业股价都有上涨、下跌或者微涨微跌三种状态. 我们还要假设 P_u、P_m 和 P_d 会随着国际纸业的三种状态而变化，这显然更不合理.

复 习 题

1. 已知如下数据，求出衍生产品的价格.

	S_0	S_u	S_d	U	D	r	τ	
(a)	100	20	80	18	−10	0.06	1年	
(b)	60	90	50	10	0	0.05	6个月	
(c)	50	60	45	5	0	0.05	1个月	
(d)	40	50	20	40	−10	0.06	8个月	
(e)	90	100	80	20	−10	0.05	3个月	
(f)	100	120	90	0	20	0.05	1年	42

2. 假设习题1(a)中的衍生产品报价为8美元. 你将如何操作? 估计(计算)你的无风险利润.

3. 对习题中1(b)部分重复习题2的计算，其中衍生产品的报价为3美元.

4. 对习题中1(c)部分重复习题2的计算，其中衍生产品的报价为2美元.

5. 假设你是交易商，一客户希望以超过市场公平价格0.10美元购买1 000 000股习题1(b)部分描述的股票期权. 你该如何套期保值? 确定你的净利润. 43

第 3 章　股票与期权的二叉树模型

十月对于股票投机者而言是最危险的月份之一．其余的依次是七月、一月、九月、四月、十一月、五月、三月、六月、十二月、八月和二月．

——马克·吐温

3.1　股票价格模型

在前面的章节中，我们用二叉树模型来表示股票价格的变动路线并进行了相关计算．本章我们将在力求保持计算简便的同时，进一步推导出与现实情况更为贴近的多期模型．

$$S_0 = \text{股票在 } t = 0 \text{ 时刻的价格}$$

如前章所述，假设股票的价格在单位时期内只能够沿着两个方向变动，图 3-1 和图 3-2 采用二叉树的形式列出了可能变动的两个方向．注意将来的价格就等于现值与相应收益率的乘积．假定股票的参数 u、d 和 p 均已知．在以后的章节中我们将给出根据实际的市场数据确定这些参数值的方法．

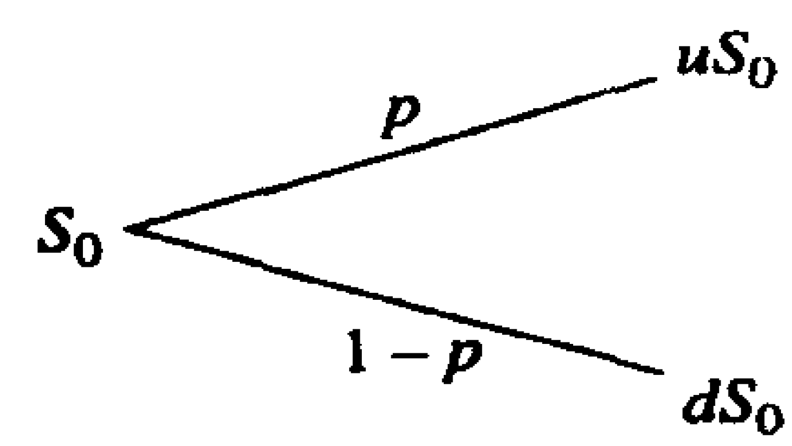


图 3-1　股票价格二叉树

在时刻 $t=1$ 时股票价格 S_1 等于 S_0 与 u 或者 d 的乘积，显然 $u>1$ 且 $d<1$.

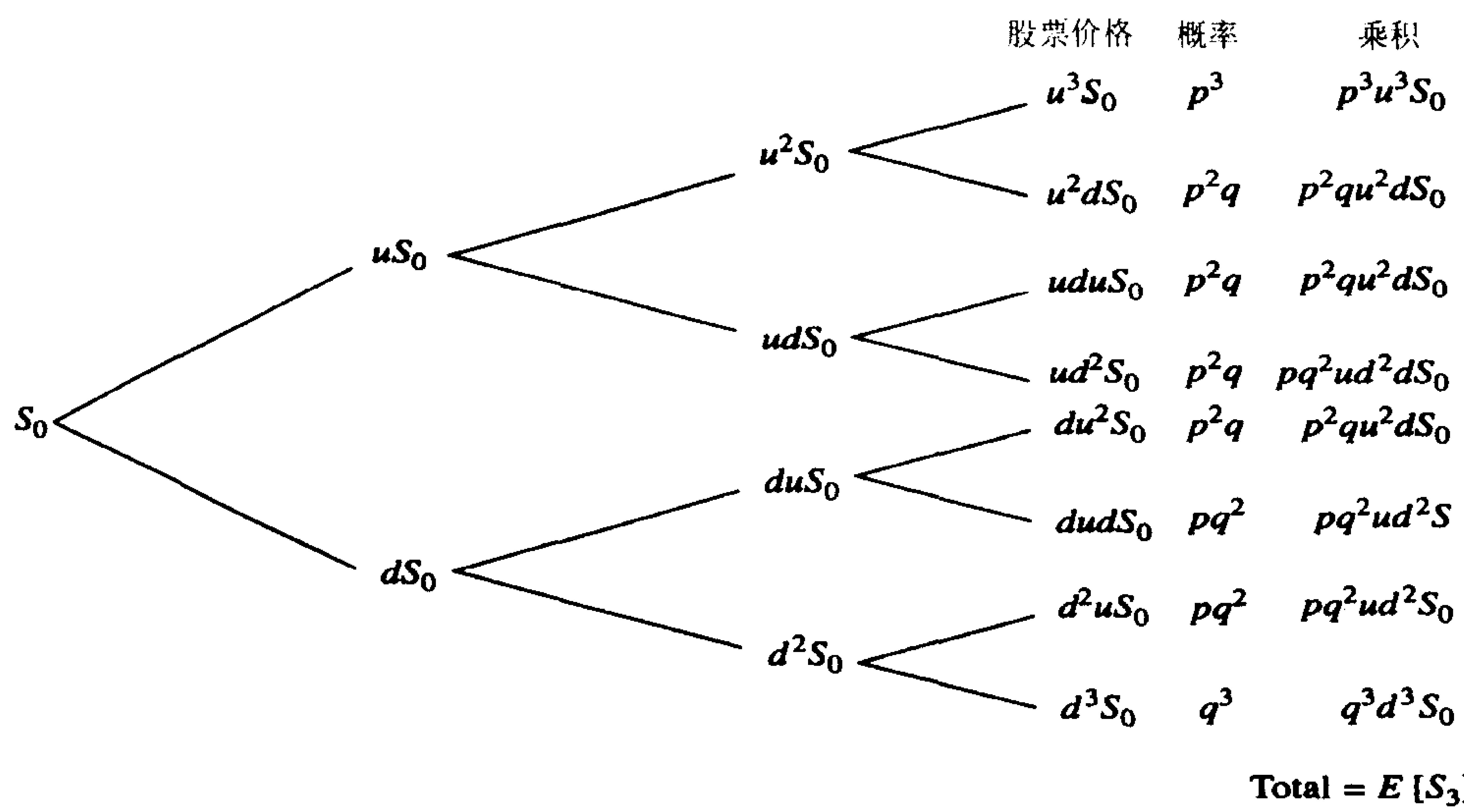


图 3-2　股票价格的二叉树展开图

如果认为股票价格向上变动的概率是 p，则向下变动的概率是 $q=1-p$. 在继续探讨之前，我们首先来计算一下 S_1 的期望值$E[S_1]$.

由假设知道 S_1 是由因素 S_0 决定的，所以我们得到：

$$
\begin{aligned}
E[S_1] &= puS_0 + qdS_0 \\
&= (pu + qd)S_0
\end{aligned}
$$

其中 $pu+qd$ 项反映了股票价格的漂移：

当 $pu + qd > 1$ 时，股票价格向上漂移

当 $pu + qd < 1$ 时，股票价格向下漂移

当 $pu + qd = 1$ 时，股票价格没有漂移

44~45 注意如果 $p=q=\frac{1}{2}$，股票价格的漂移系数是 u 和 d 的算术平均数，即$(u+d)/2$. 接下来让我们来计算多期情况下的股票价格.

3.1.1 二叉树图的重新安排

首先我们将股票价格展开成图 3-2 所示的多期二叉树图. 我们希望找到 $E[S_3]$，根据已有信息，不难推出：

$$
\begin{aligned}
E[S_3] &= \text{各列乘积之和} \\
&= [(pu)^3 + 3qd(pu)^2 + 3(qd)^2 pu + (pd)^3]S_0
\end{aligned}
$$

将各项进行整理，最终可以得到：

$$(pu + qd)^3 S_0$$

由上式可以推出：

$$E[S_{k-1}] = (pu + pd)E[S_k] \tag{3-1}$$

换而言之，每经过一个时期股票价格的期望值就是上一期价格的倍数关系，倍数为漂移率 $pu+qd$，用公式表示如下：

$$E[S_k] = (pu + pd)^k S_0$$

注意在二叉树的展开图中，每个时刻节点的个数是以稳定的比率递增的. 经过 k 个时期后节点的个数是 2^k.

为了使图表看起来更清晰一些，我们对原来的二叉树展开图进行压缩整理. 在二叉树展开图中 u^2dS_0 和 $uduS_0$ 采用不同的节点分别表示. 由于它们所代表的股票价格是完全相同的，因此可予以合并.

图 3-3 是股票价格的二叉树压缩图，显然压缩图更为直观，但问题是我们可以利用它得到 $E[S_3]$的值吗？因为我们的目的是要利用这样的图表来对期权以及证券衍生产品定价，同时描述资产组合的行为方式.

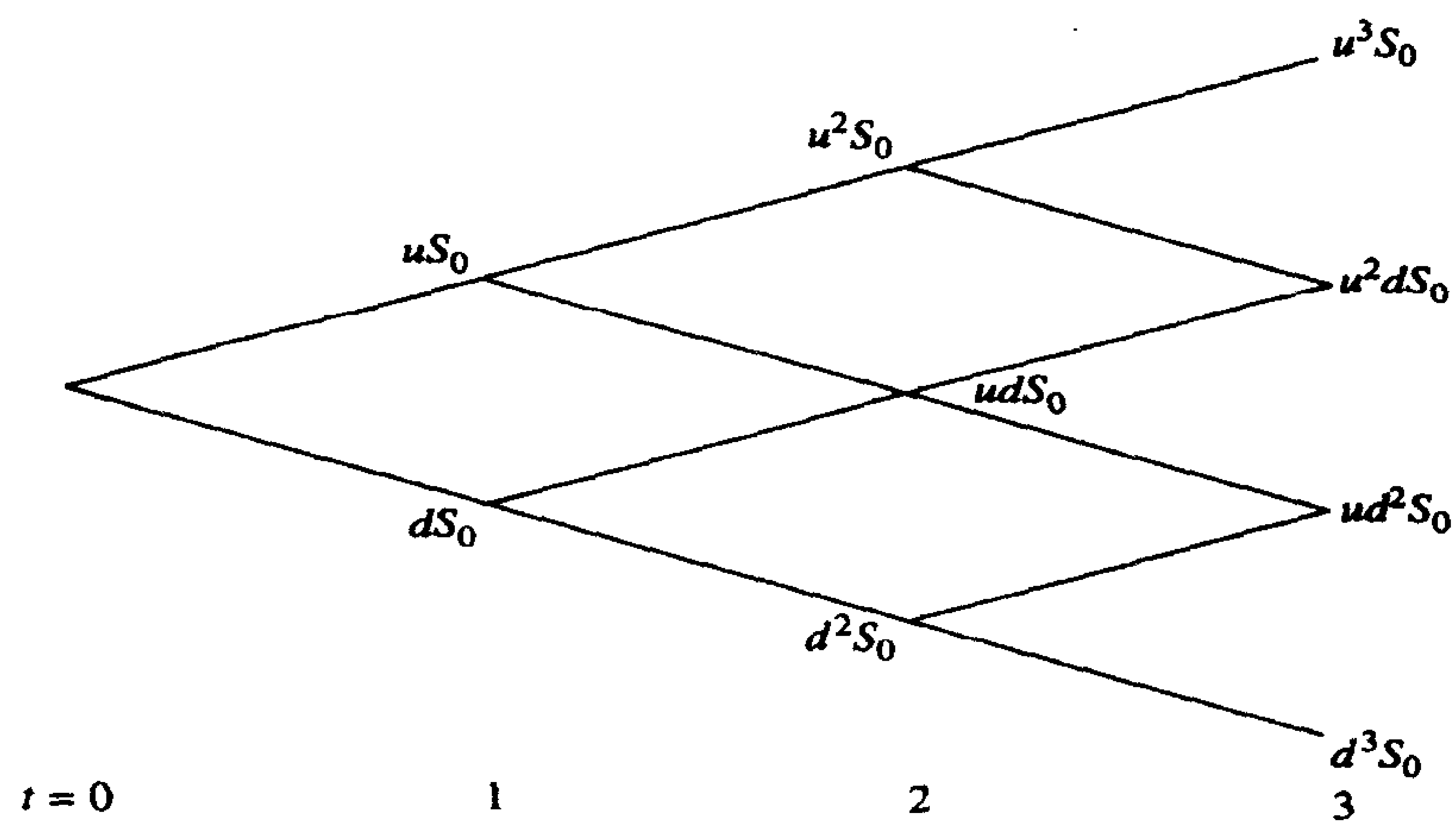


图 3-3 股票价格的二叉树压缩图

3.1.2 连锁法和期望值

我们将以 $E[S_3]$为例介绍二叉树压缩图，采用的一般方法称为连锁法或者后向推导. 46

首先我们只保留股票价格二叉树图的最后一列，即 $t=3$ 时的股票价格，如图 3-4.

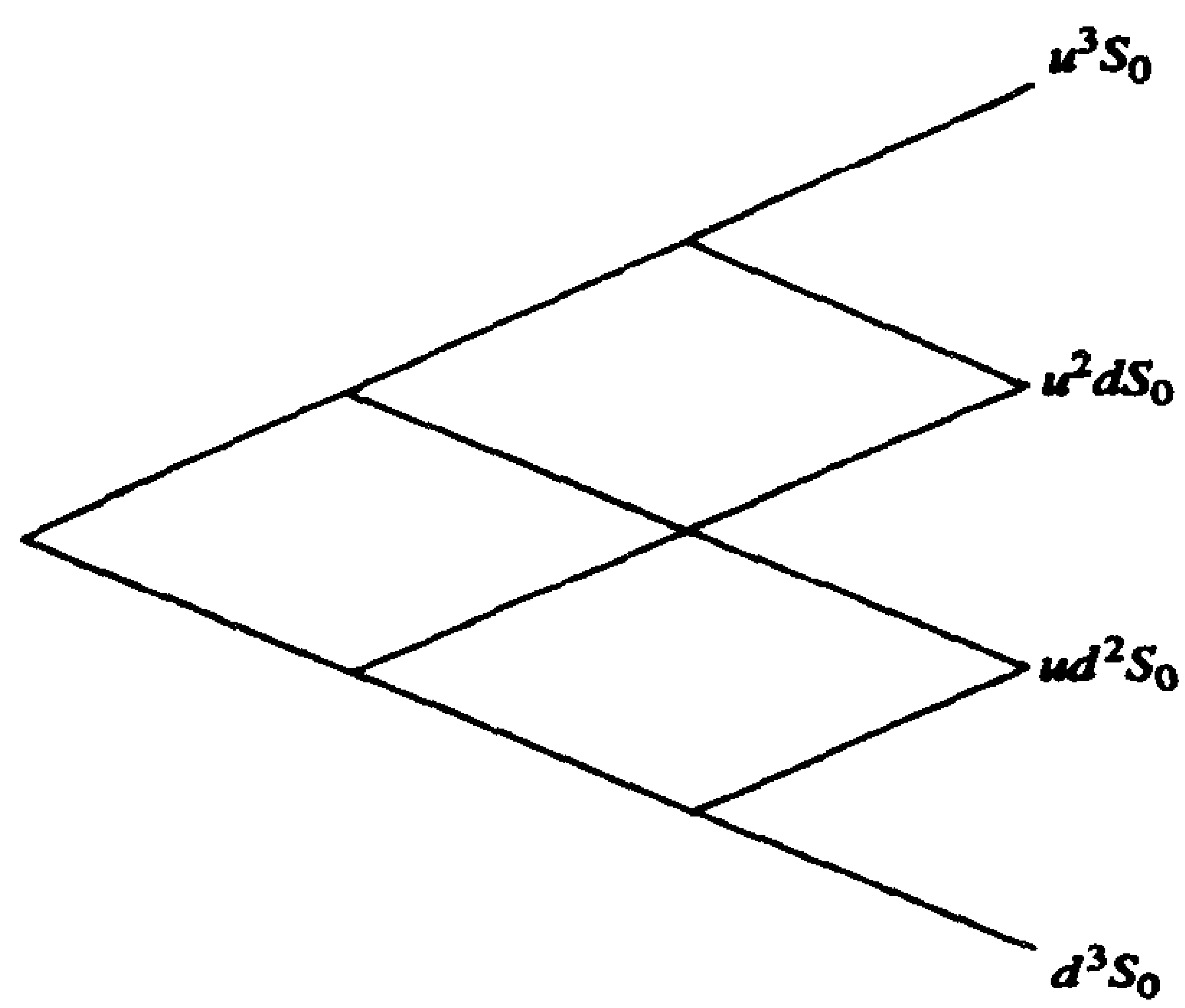


图 3-4 股票价格二叉树图的最后一列

我们的目标是要计算出那些空白节点处的股票价格期望值，而不是该点实际的股票价格. 从图中截取一段，得到如图 3-5 的分枝图. 若 x 是股票未来价格 a

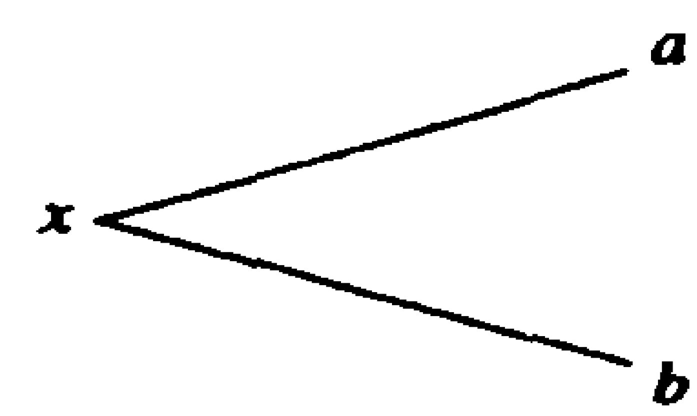
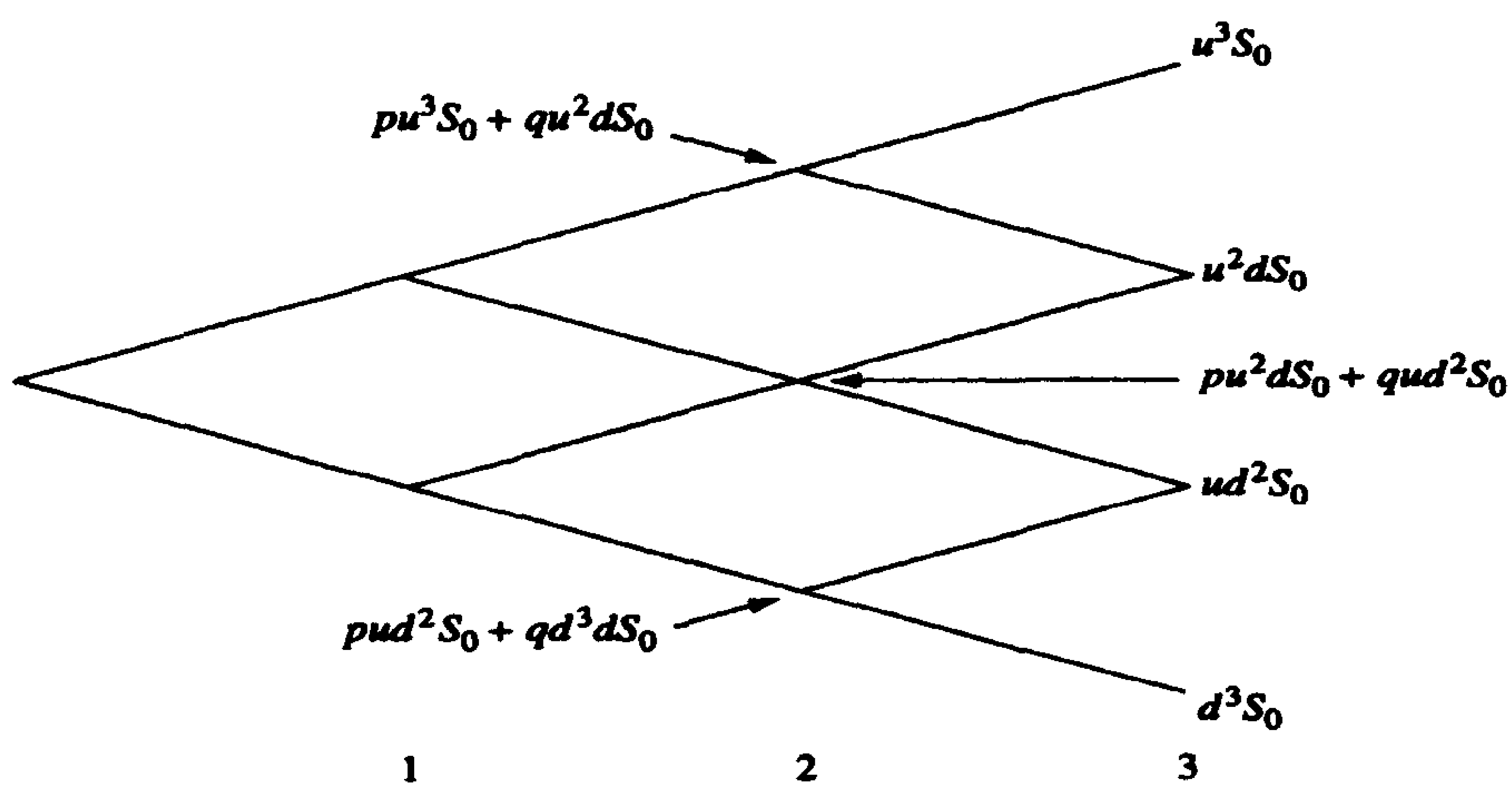


图 3-5 股票价格二叉树的一个分枝图

和 b 的期望值，则：

$$x = pa + qb$$

这就是连锁法．让我们用这个法则来计算第三列，即 $t=2$ 时的股票价格期望值．结果如图 3-6．



47 图 3-6 列示二列的股票价格二叉树图

重要提示

1. 我们并不是在重复计算由图 3-3 得到的数据，此处节点值的含义与先前是不同的．

2. 聪明的读者在此会有疑问并且认为“由这个法则推导的数据是不对的．在图 3-2 股票价格二叉树展开图中，u^2dS_0 出现了 3 次，而在图 3-6 中仅出现了一次”．这是一个很好的问题，它点出了连锁法的要点所在．我们将在随后的介绍中给予解答．

我们继续用连锁法来计算第二列(即 $t=1$)时的股票价格期望值，如图 3-7．

现在只剩下一个节点期望值 X 需要计算，我们认为该节点的输入值就是 $E[S_3]$．从图 3-7 来看答案就比较简单，各节点的输入值合并后就得到了 X．我们先举一个例子，首先来看当 $t=2$ 时最上方的节点的输入值为 $pu^3S_0+qu^2dS_0$，该节点股票价格是 u^2S_0，如果我们将该节点输入值中的股票价格因子分离出

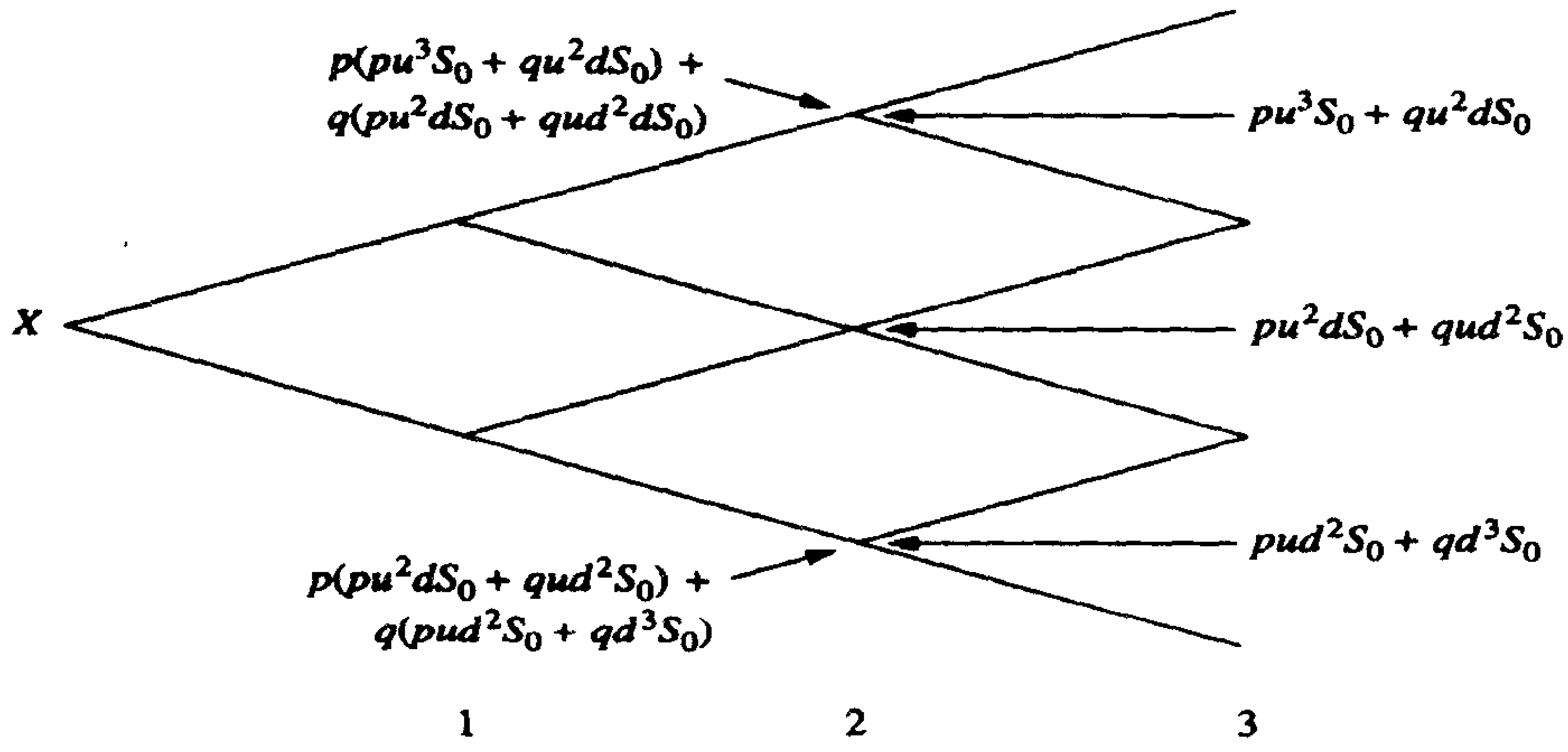


图 3-7 列示三列的股票价格二叉树图[⊖]

来，可以得到：

$$u^2S_0(pu+qd)$$

再来看一种情形，分析当 $t=1$ 时最下方的节点的输入值特点. 该节点的股票价格是 dS_0，如果我们将该节点输入值中的股票价格因子分离出来，可以得到：

$$dS_0(p^2u^2+2pud+d^2q^2)=dS_0(pu+dq)^2$$

连锁法的模式是不是很一目了然？每个节点处的输入值有如下形式：

$$(\text{节点股票价格})\times(pu+dq)^{\text{剩余列数}}$$

因此，

$$E[S_3]=S_0(pu+dq)^3$$ 48

为了验证公式的通用性，假设一个包括 k 列的股票价格二叉树，用连锁法计算 $k-1$ 列的输入值，我们发现公式仍然得到满足.

习题

1. 假设一股票在相邻的交易日价格上涨 50% 的概率是 $\frac{1}{3}$，下跌 10% 的概率是 $\frac{2}{3}$. 如果该股票周一开始交易，价格是 2 美元，那么预期周四价格的期望值是多少？请用股票价格的二叉树压缩图来求解.

2. 假定一个股票价格模型满足 $u=1.2$、$d=0.8$、$p=0.6$ 且 $E[S_2]=27.15$. 求 S_0 以及所有可能出现的 S_1 和 S_2.

⊖ 最左列的箭头应指向“1”栏. 译者已经与原书两位作者核实.

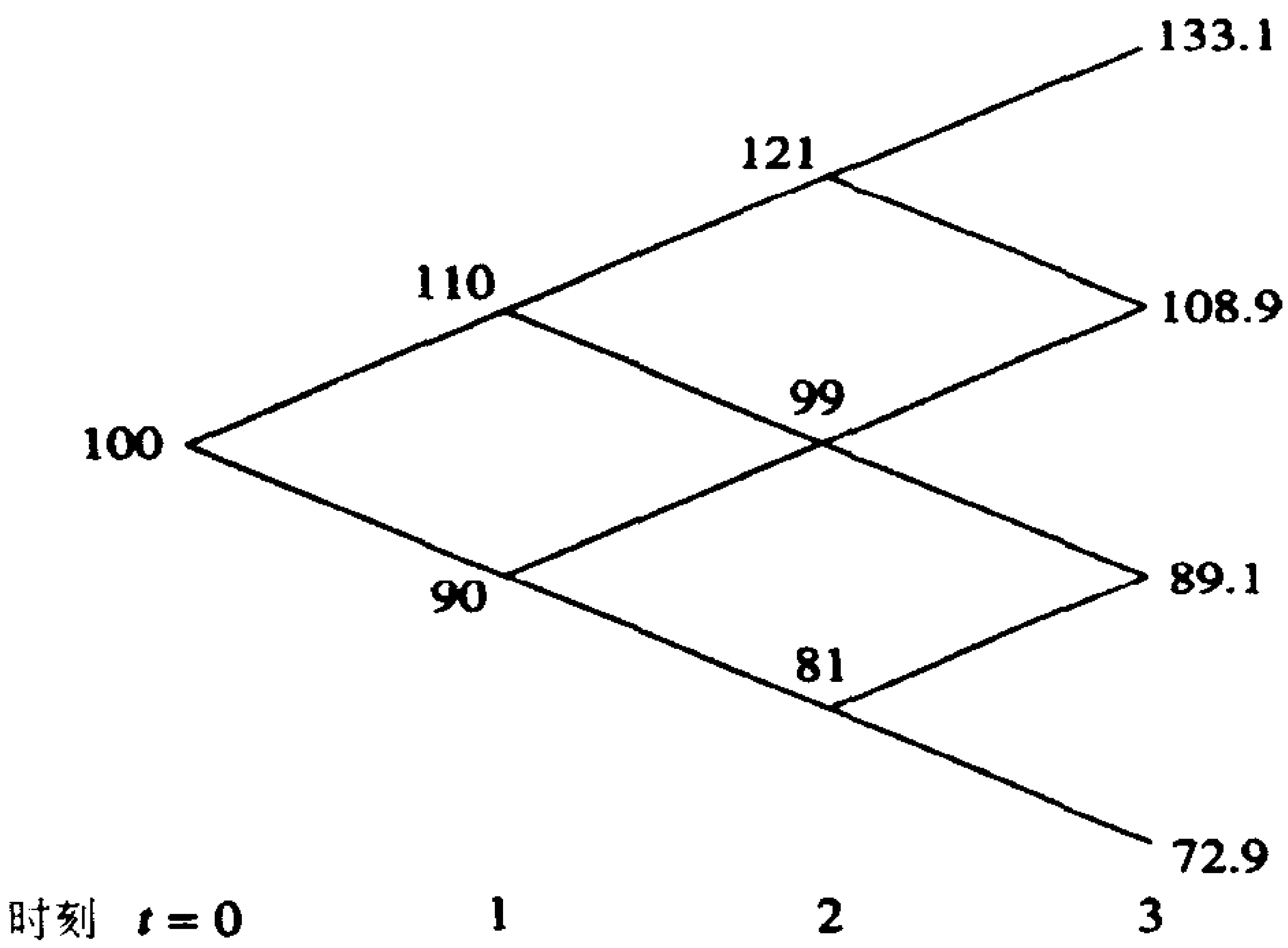
3. 如果某股票价格模型满足 $u=1.134$，$d=0.8$，$p=0.6$ 且 $S_2=6.38$、4.52 或者 3.2. 那么通过画节点图，我们可以求得股票的初始价格即 S_0，请说明理由.

3.2 用二叉树模型进行看涨期权定价

例 1 假定

$$S_0=100 \qquad u=1.1$$
$$X=105 \qquad d=0.9$$
$$r=0.05 \qquad p=0.85$$

期权到期时间为 $t=3$. 我们首先构造一个三期的股票价格二叉树模型(如图 3-8).



49 图 3-8 股票价格二叉树图

我们接着再画出可以反映三期($t=3$)的期权价格的二叉树图，见图 3-9.

运用连锁法则，可以得到其他节点的期权价格. 我们考虑二叉树的一个分枝，如图 3-10. 我们首先必须由套利定价原则得到概率 q 和 $1-q$. 运用公式(2-5)得到 q 的表达是：

$$q=\frac{e^{r\tau}S_0-S_d}{S_u-S_d}$$

根据我们的设定，把 $S_u=uS_0$ 和 $S_d=dS_0$ 代入，这样得到在二叉树中的常量 q 值：

$$q=\frac{e^{r\tau}-d}{u-d} \tag{3-2}$$

因此，例 1 中

$$q=\frac{e^{0.05}-0.09}{1.1-0.9}=0.7564$$

接着让我们根据公式(2-4)进行贴现，相应的连锁步骤为：

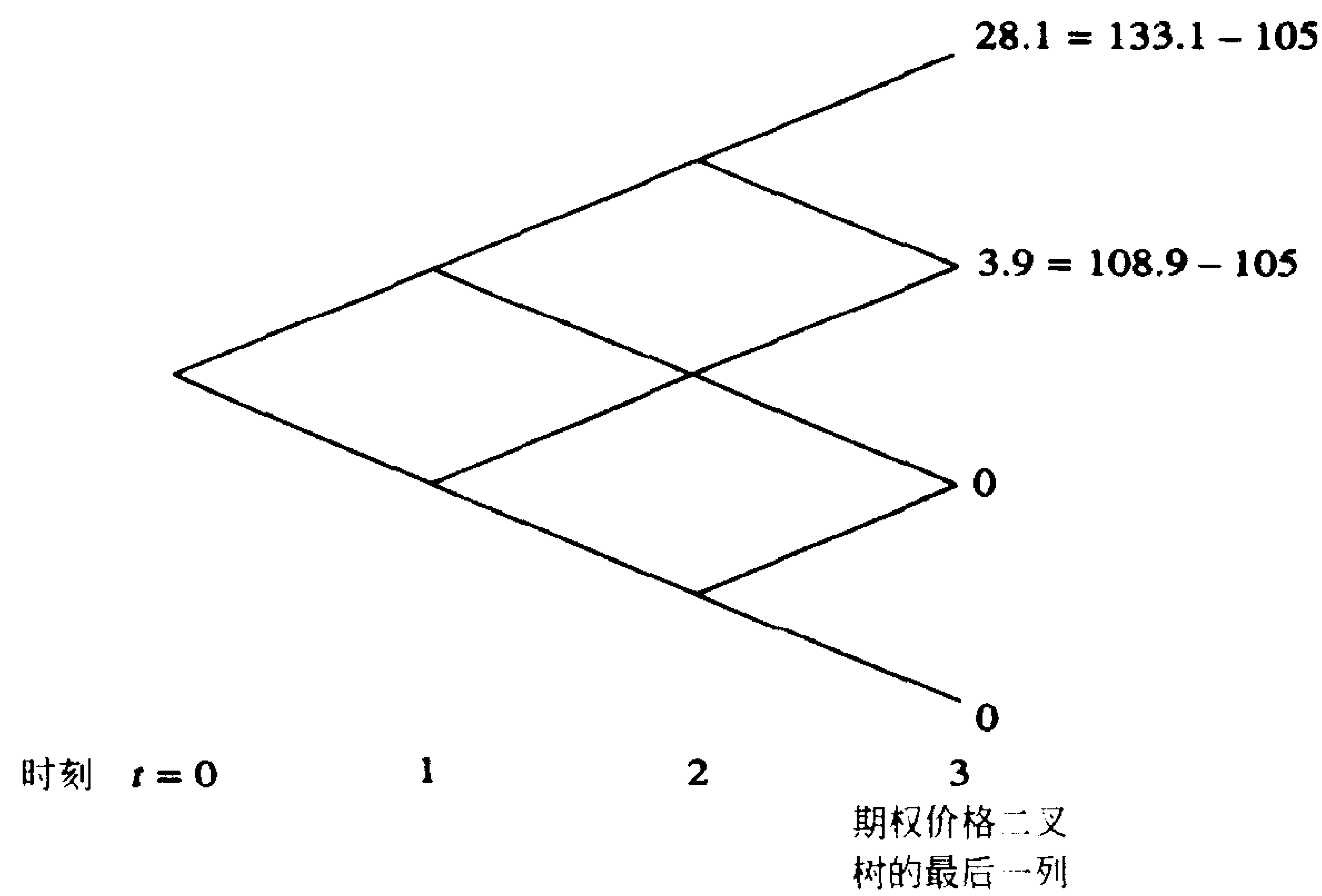


图 3-9 列示最后一列的期权价格二叉树图

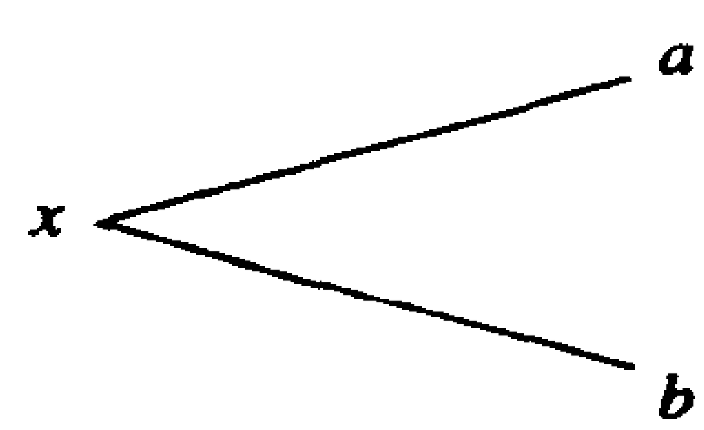


图 3-10 期权二叉树分枝的一般形式

$$x = e^{-r\tau}[qa + (1-q)b] \tag{3-3}$$

代入例 1 的数据，由连锁法则可以求出 $t=2$ 时最上方节点的输入值：

$$e^{-0.05}(0.7564 \times 28.1 + 0.2436 \times 3.9) = 21.12$$

依此类推，计算出所有节点的输入值，如图 3-11. 所以，该期权当期的理论价格应是 11.87 美元.

期权的价格由期权价格二叉树图的第 3 列的输入值决定，有人也许会问：我们感兴趣的只是一个节点的值，为什么要把其他的值也求出来？该方法确实存在不足. 存在一种方法只用一步就可以得到 11.87 美元这个结论. 对于欧式期权来说这种简单的方法是可行的，因为如果我们能事先知道期权定价经过的节点数，那么它的价格也就固定下来了. 但是，我们通常面对的许多期权价格常常依赖于股票价格的路径，也就无法仅仅通过简单的一步定价来得到这些复杂期权的价格了.

另一方面，运用连锁法则的好处是可以非常灵活地给美式期权、障碍期权（敲出期权）和利率期权定价. 这些更复杂的期权价格需要结合与路径有关的一些金融变量计算得到.

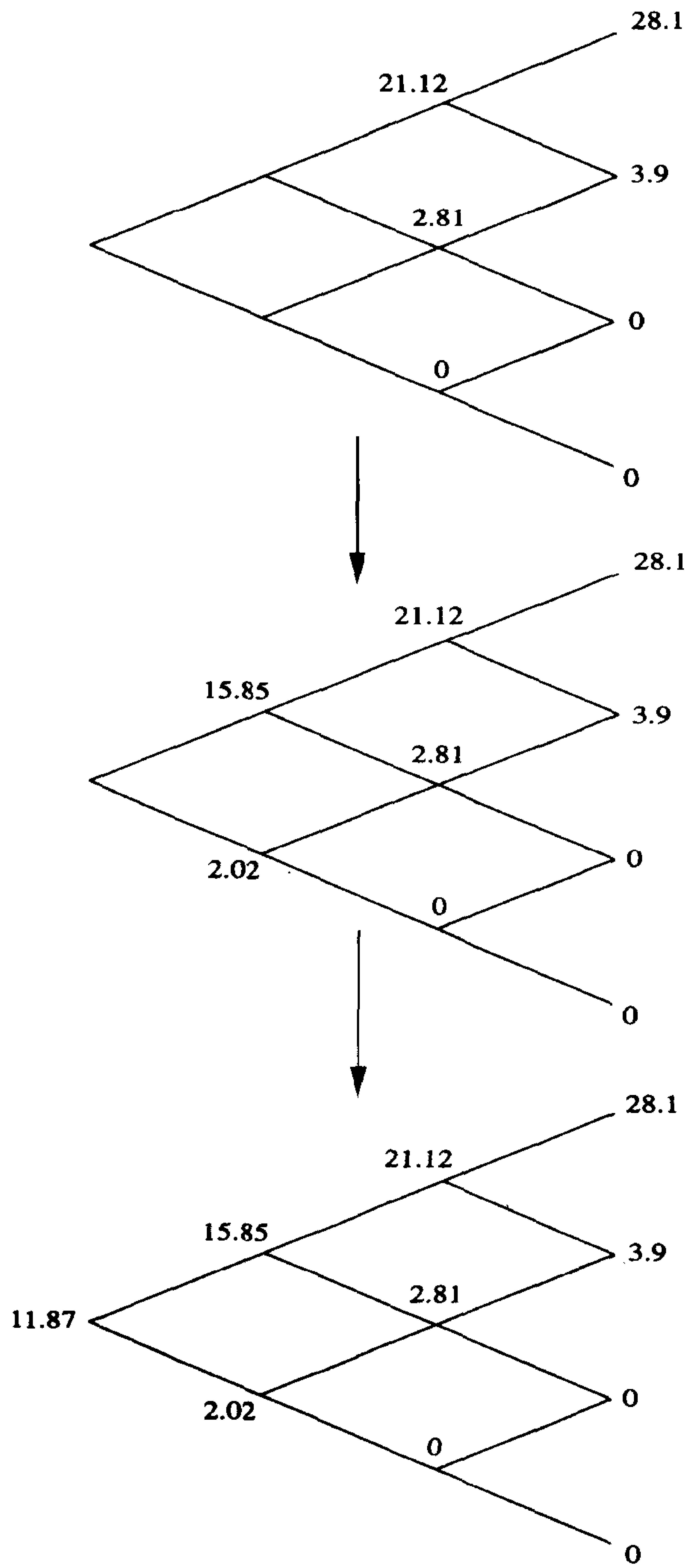


图 3-11　完整的期权价格二叉树图

习题

1. 假设股票价格模型参数是：$u=1.7$，$d=0.8$，$S_0=120$. 一个欧式看涨期权到期时间 $t=3$，执行价格 $X=115$，利率 $r=0.06$. 请用连锁法则方法求出在 $t=0$时该期权的价格. 50~51

2. 假定股票价格模型参数与题 1 相同. 一个欧式看涨期权的到期时间 $t=3$，执行价格 $X=140$，利率与上题相同. 请用连锁法则方法求出在 $t=0$ 时该期权的价格.

3. 一股票价格模型参数是：$u=2.0$，$d=0.5$，$S_0=16$. 一个欧式看涨期权的到期时间 $t=4$，执行价格 $X=20$，每期的利率 $r=0.1$. 请用连锁法则方法求出在 $t=0$ 时该期权的价格.

4. 检验使用以下"一步式"方法求解题 3 的答案的正确性：首先画出一个包括四期的股票价格二叉树图，每一个到期日的节点用来计算概率. 例如，计算节点 $S_4=64$ 处相对应的概率由下式得到：$4q^3(1-q)$. 其中"4"表示有 4 条路径到达该节点；"q^3"表示到达该节点股票价格发生了 3 次向上的变动.

5 个节点处的概率都是由到达该节点的路径数，乘上 q 的上涨次方，再乘上 $1-q$ 的下跌次方. 为了得到期权的价格，接下来的一步就是用期权每个节点的利润，比如 S_4-X 或者 0，乘上该节点的概率，并求和. 最后，用所求的和乘以 $e^{-0.1\times 4}$贴现，即得到期权的价格.

提示：到达节点的路径数分别是：1，4，6，4，1.

3.3 美式期权定价

欧式期权通常只能在到期日执行，但美式期权可以在到期日前的任何时候执行. 那么提前执行会如何影响期权的价值呢？本节我们将会介绍怎样对一个美式看跌期权定价. 我们仍然采用前一节中的数据，具体如下：

$$S_0=100 \qquad u=1.1$$
$$X=105 \qquad d=0.9$$
$$r=0.05 \qquad p=0.85$$

期权到期时间为 $t=3$

回忆在上一节我们由套利定价原理得到的概率 $q=0.7564$，$1-q=0.2436$，其股票价格二叉树图如图 3-12. 图 3-13 是只列示最后一列看跌期权价格的二叉树图.

我们首先从图 3-14 所示的分枝图开始. 采用何种思路对美式看跌期权的价格 V 进行定价呢？在节点处，我们有两个选择：要么立刻执行(在 $t=2$ 处)，要么继续持有至下一期($t=3$)再执行. 我们的策略自然是计算每一种方案的价值，再选择最大的. 首先来看第 2 种方案，由连锁法则：

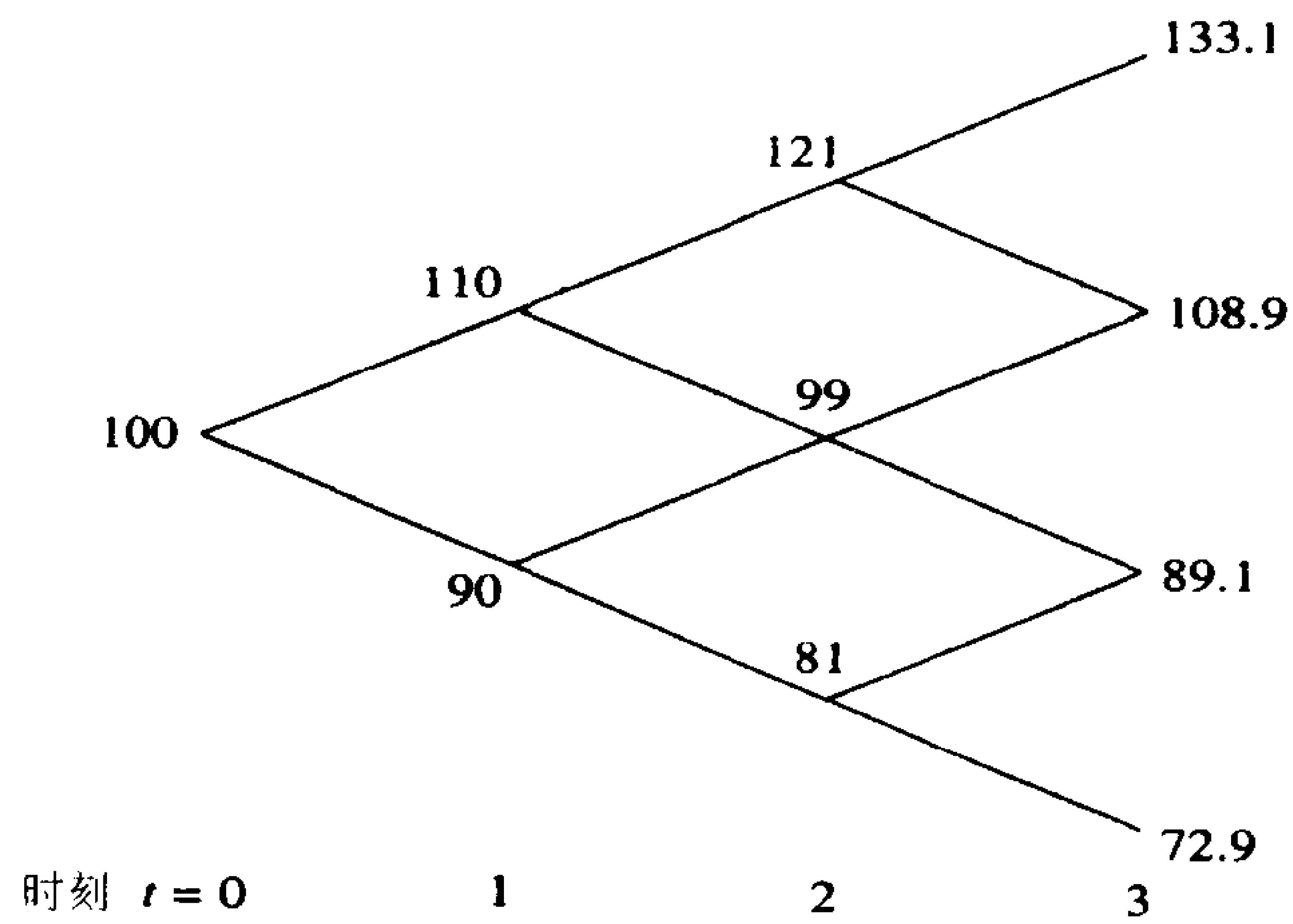


图 3-12 股票价格的二叉树图

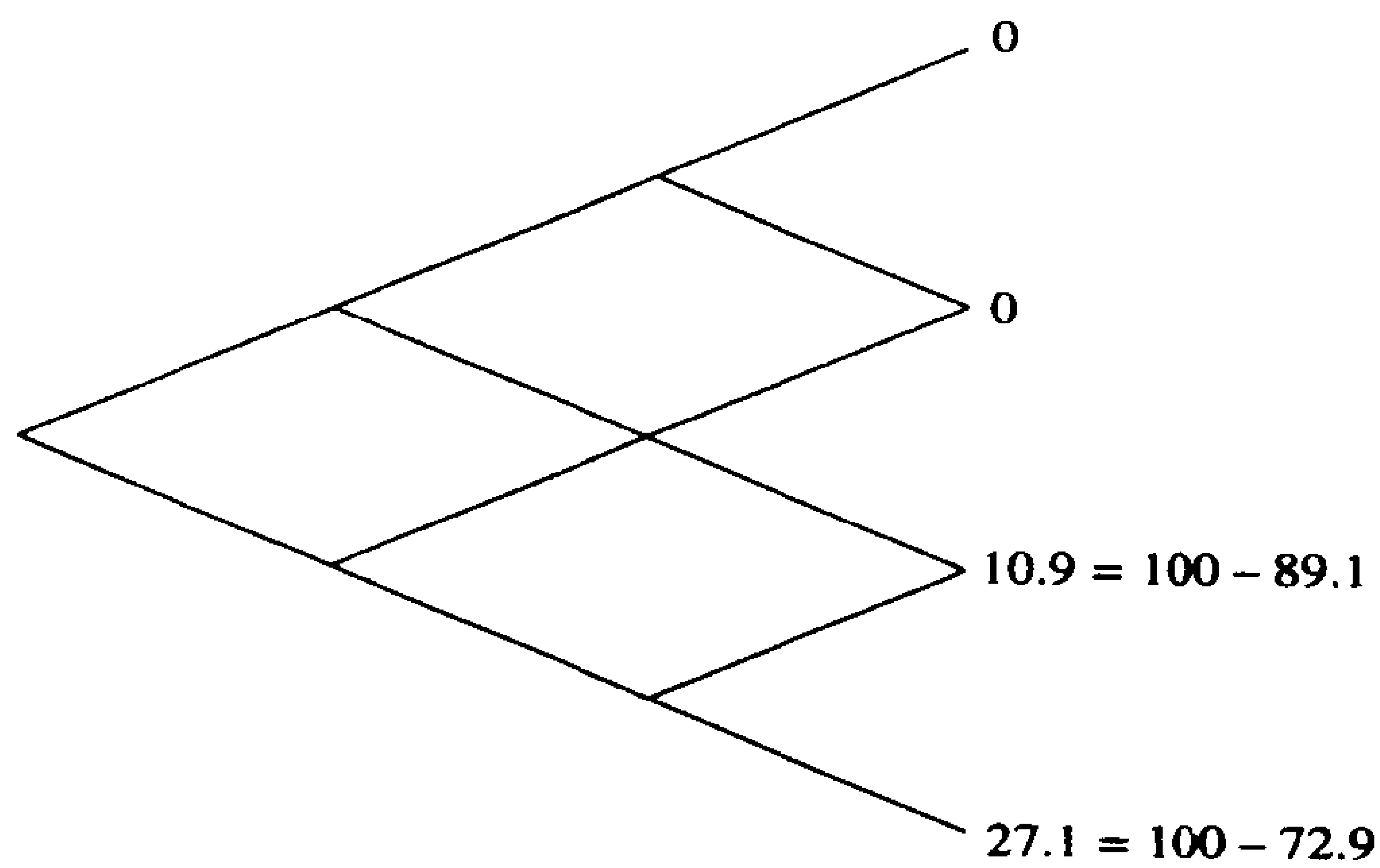


图 3-13 美式看跌期权的二叉树图

$$\text{连锁法值} = e^{-0.05}(10.9 \times 0.7564 + 27.1 \times 0.2436) = 14.12$$

图 3-16 给出了该节点的输入值比较情况. 注意我们对值 19 并没有贴现，因为我们是通过立刻执行得到了这笔资金，没有时间差. 接下来在节点的连锁计算中我们将输入值放在“最大输入值”方框中. 用同样的方法计算得出所有节点处的输入值，见图3-17. 最终我们可以确定该期权在初期的价格应为 2.74 美元. 如果没有可以“提前执行”这一优惠，它的价值将要低多了.

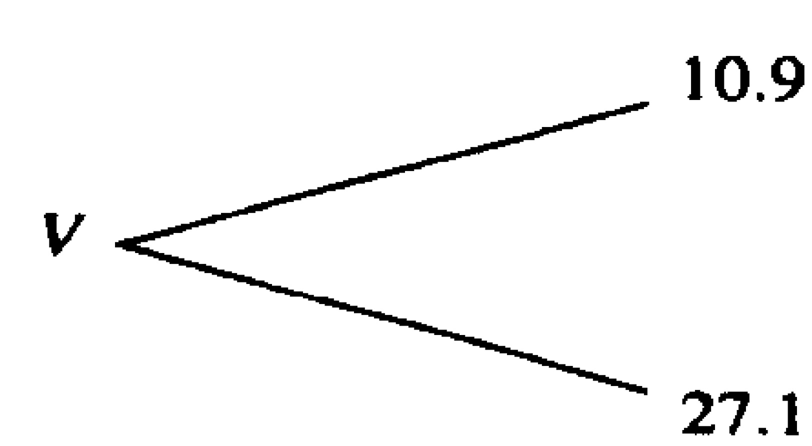


图 3-14 期权二叉树图的分枝图

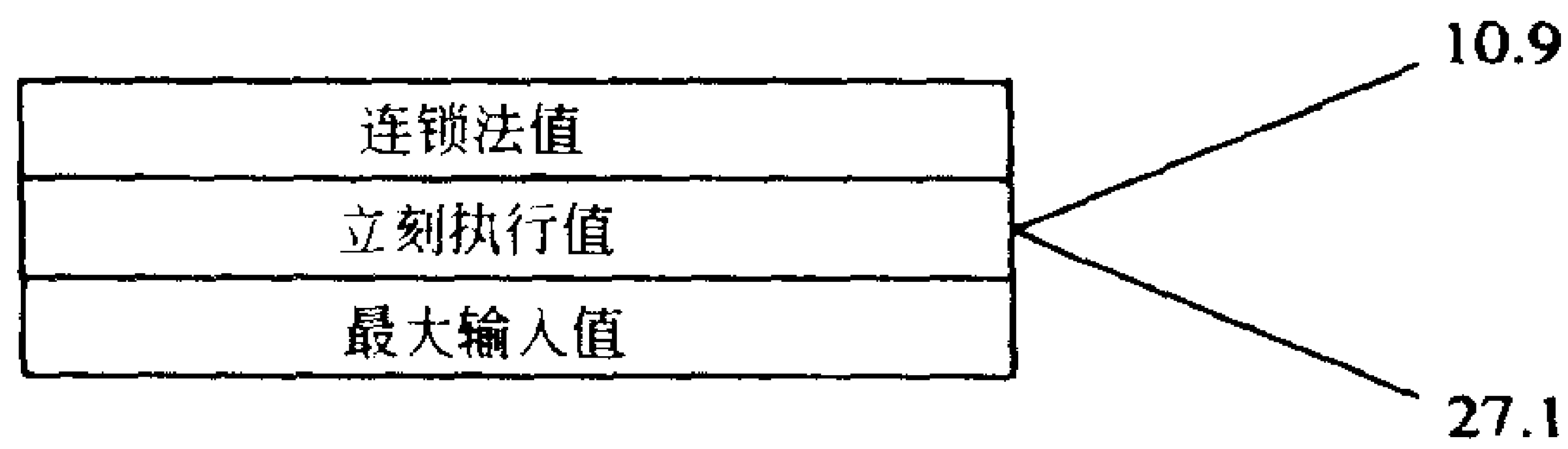


图 3-15　节点处不同方案的值的表示法

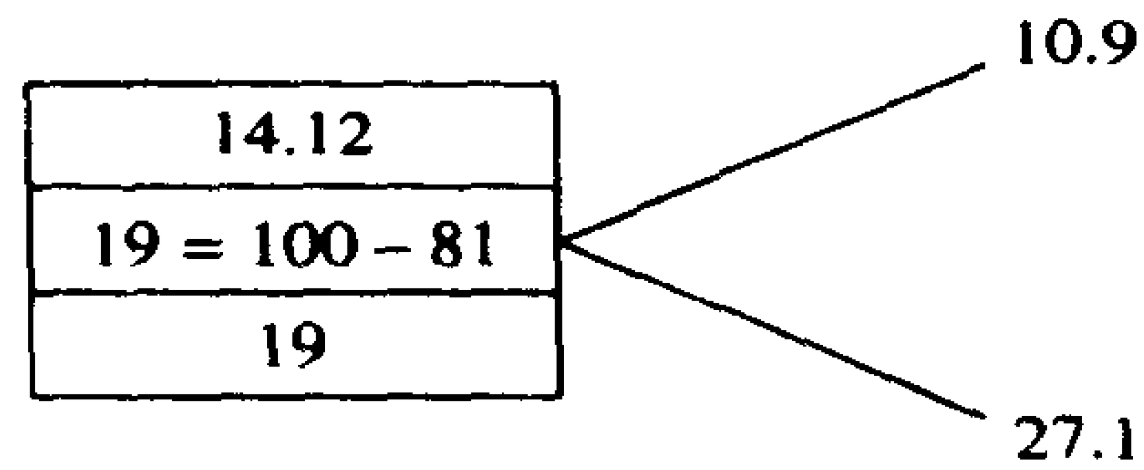


图 3-16　美式看跌期权一个节点的完整表示

52~53

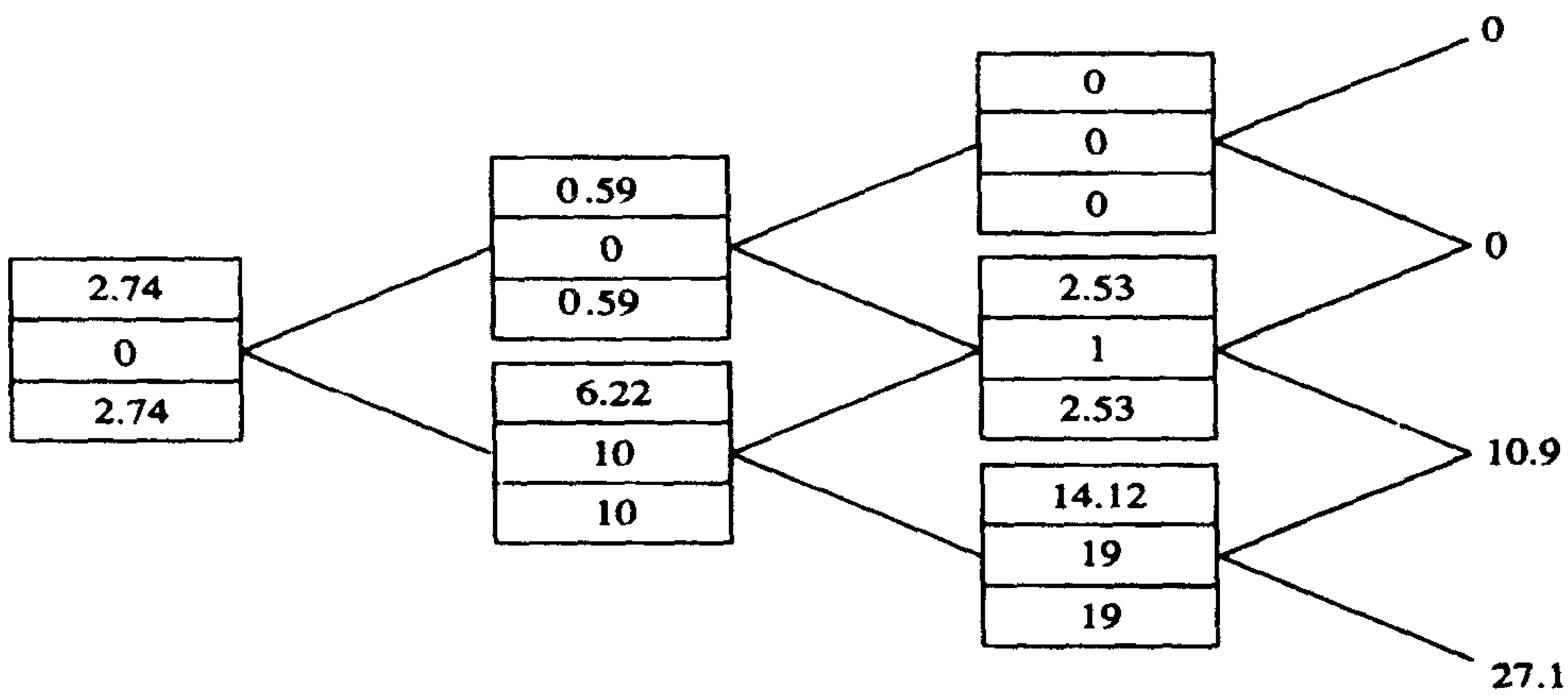


图 3-17　完整的美式看跌期权二叉树图

习题

1. 本题中已知期数 n；最初股票价格 S_0；股票价格上涨收益率 u；股票价格下跌收益率 d；短期利率 r. 请用以下数据分别计算相应欧式看涨期权在初始时刻 $t=0$ 的价格.

	n	S_0	u	d	X	r
(a)	2	100	1.1	0.9	95	0.05
(b)	3	80	1.2	0.8	100	0.04
(c)	4	60	1.3	0.8	75	0.06
(d)	4	50	1.2	0.9	45	0.03
(e)	4	40	1.1	0.7	40	0.05
(f)	5	110	1.4	0.7	120	0.06
(g)	5	90	1.3	0.9	80	0.04

2. 请用与习题 1 相同的数据，分别计算相应欧式看跌期权的价格.

3. 请用与习题 1 相同的数据，分别计算相应美式看跌期权的价格.

4. 假设看跌期权将在下个时期到期，股票价格模型如图 3-18. 假定 $q=0.8$，$e^{rt}=1.06$. 求满足 $90<X<110$ 的执行价，并证明提前执行比卖出该看跌期权能够获得更多的收益.

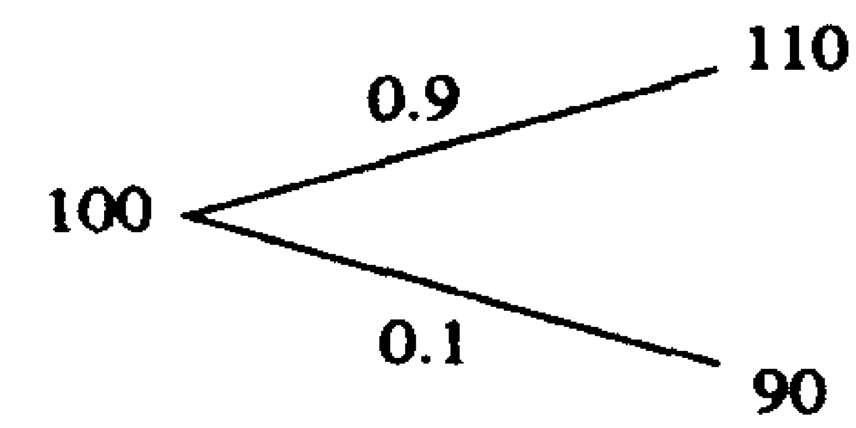


图 3-18 习题 4 的股票价格模型

54

3.4 一类奇异期权——敲出期权的定价

在本例中我们仍然沿用前面的例子：

$S_0=100$	$u=1.1$
$X=105$	$d=0.9$
$r=0.05$	$p=0.85$

期权到期时间为 $\tau=3$

我们考察的期权是一个欧式看涨期权，在 3 年后到期，执行价是 105 美元. 这些数据都与前面的一样，不一样的是这是一个敲出期权，在价格为 95 美元处设了一个障碍，即一旦股票价格低于 95 美元，那么无论其到期的价格是多少，该期权都不再有任何价值.

首先我们画出股票价格二叉树图，并在价格为 95 美元处画一条虚线作为障碍(如图 3-19)，在此基础上画出带有虚线的期权价格二叉树图(如图 3-20)，以标明障碍分界.

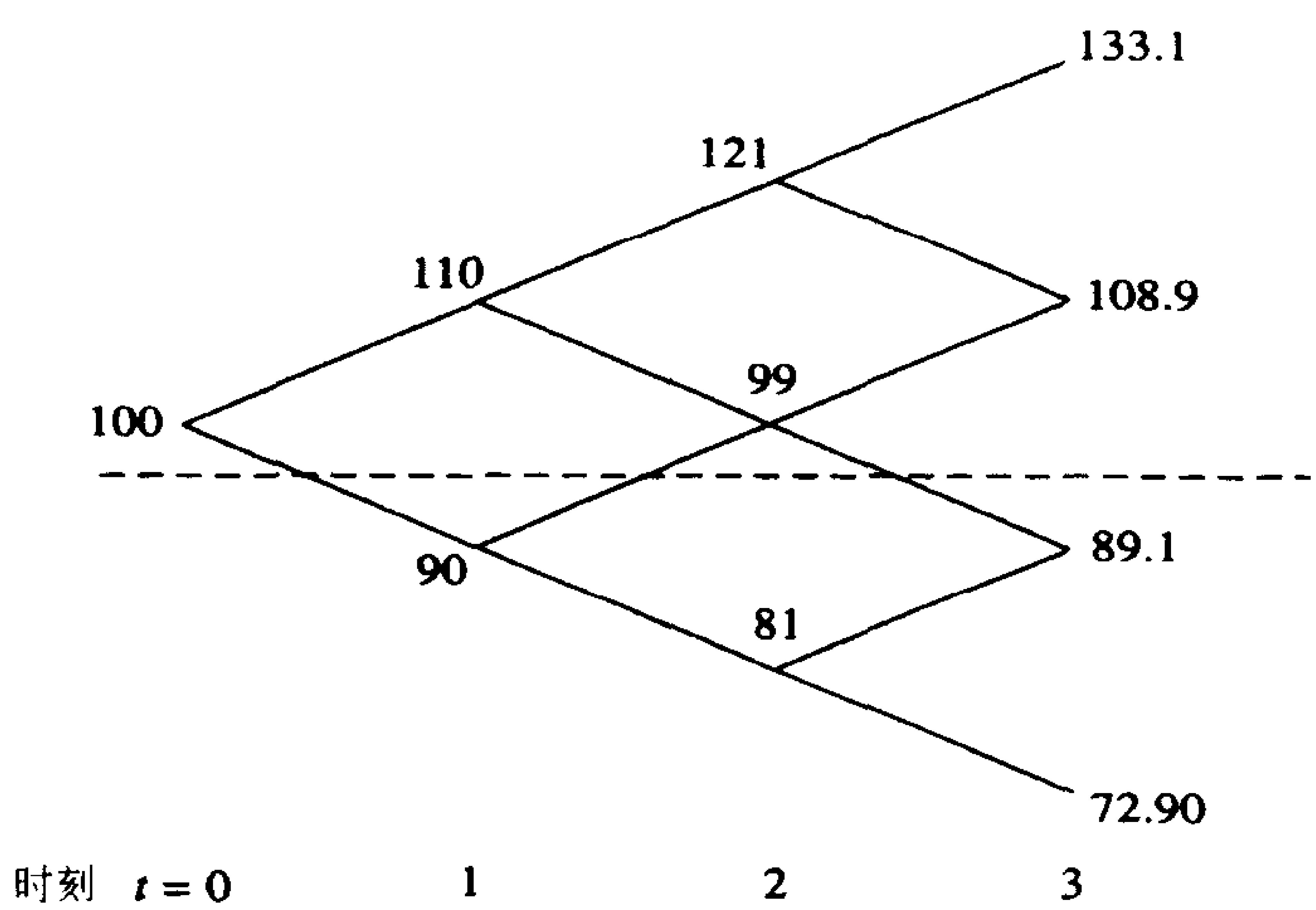


图 3-19 设置敲出障碍的股票价格二叉树图

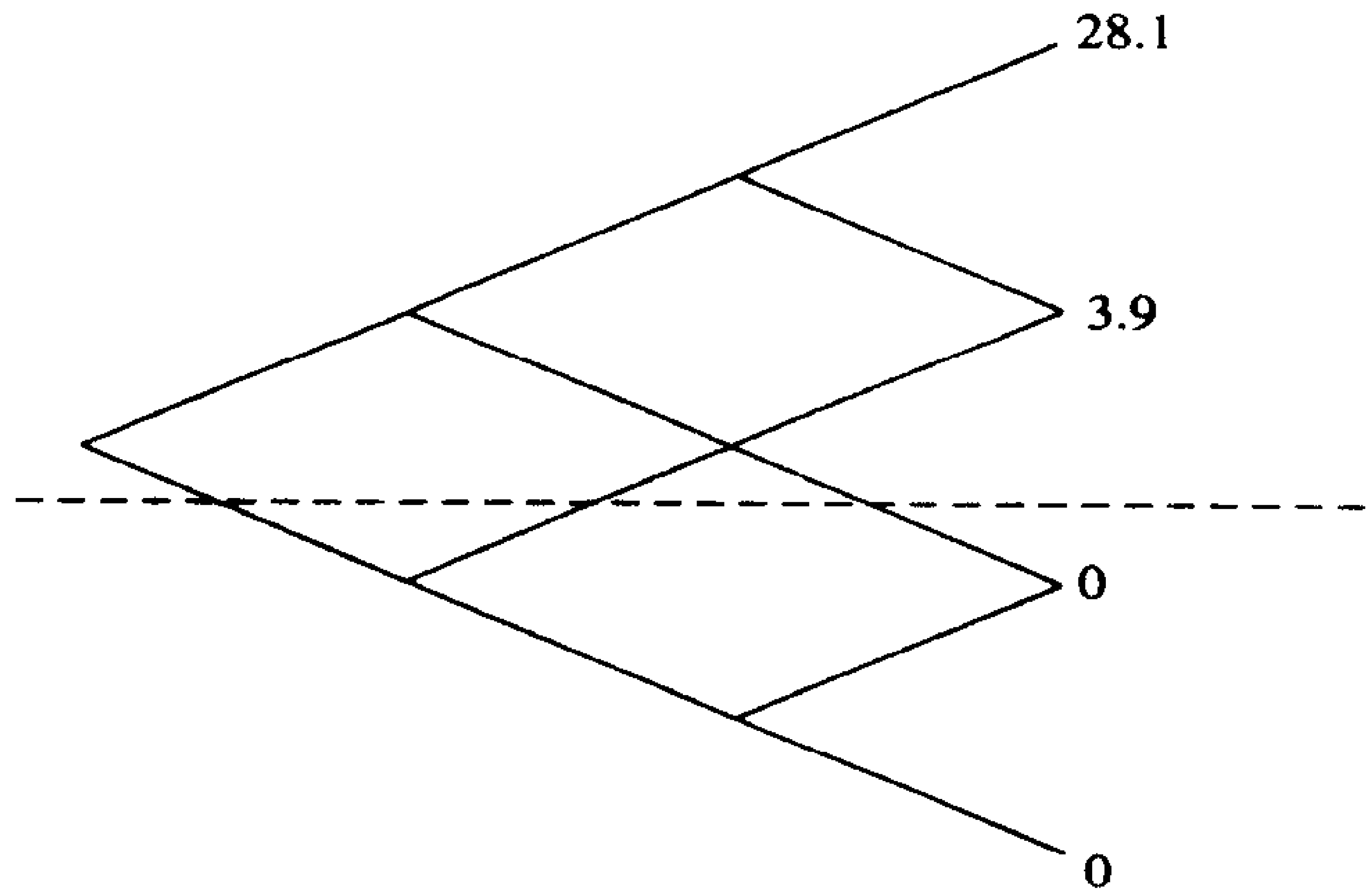


图 3-20　敲出期权的二叉树图 55

障碍法则　与前面一样，我们运用连锁法则和贴现的方法计算出期权的价格，不一样的是对于障碍(虚线)下方的节点输入值为 0.

在连锁计算的过程中，我们使用套利定价得到的概率 $q=0.7564$ 和 $1-q=0.2436$. 求 $t=2$ 以及 $t=3$ 处节点的期权输入值时可以发现，这些值与没有障碍的期权相应节点值是一样的. 障碍的影响在 $t=1$ 的节点处才产生，图 3-21 给出了敲出期权的一系列节点的输入值.

我们最终得到障碍期权的当期价值是 11.40 美元. 注意该期权比我们在第 3.1 节中介绍的普通期权价格便宜一些. 这与我们的直觉是一致的，因为普通期权在障碍线以下的收入比敲出期权高.

作为对以上方法的验证，下面我们运用另一种方法计算敲出期权的当期价值. 该期权的最终价格的确定，取决于股票价格的变动路线，而不是仅由最终的股票价格决定的. 我们拟分别用 u 和 d 来描述股票价格的上涨和下跌路线，并按从左到右的次序.

在上面的约定下我们定义 duu 表示股票的路径为下跌→上升→上升. 最终价格在屏障之上的路径有：uuu，uud，udu；最终价格在屏障之下的有：ddd，duu，dud，ddu，udd.

沿 uuu 这条路径期权的期末价格为 28.1 美元，而沿另两条路径 uud、udu，期权的期末价格为 3.9 美元. 读者可以用彩笔描出二叉树的不同路径. 从前面对展开式二叉树的讨论得知：

$$\text{路径 } uuu \text{ 发生的概率 } \Pr[uuu]=q^3=0.7564^3=0.4328$$

$$\text{路径 } uud \text{ 或 } udu \text{ 发生的概率 } \Pr=2q^2(1-q)=2(0.7564^2)(0.2436)=0.2787$$

障碍期权的期望价格可以通过上述路径的加总(并按三年期贴现)得到. 结果是：

$$e^{-0.05\times 3}E[\text{所有路径}]=e^{-0.15}(0.4328\times 28.1+0.2787\times 3.9)=11.4$$

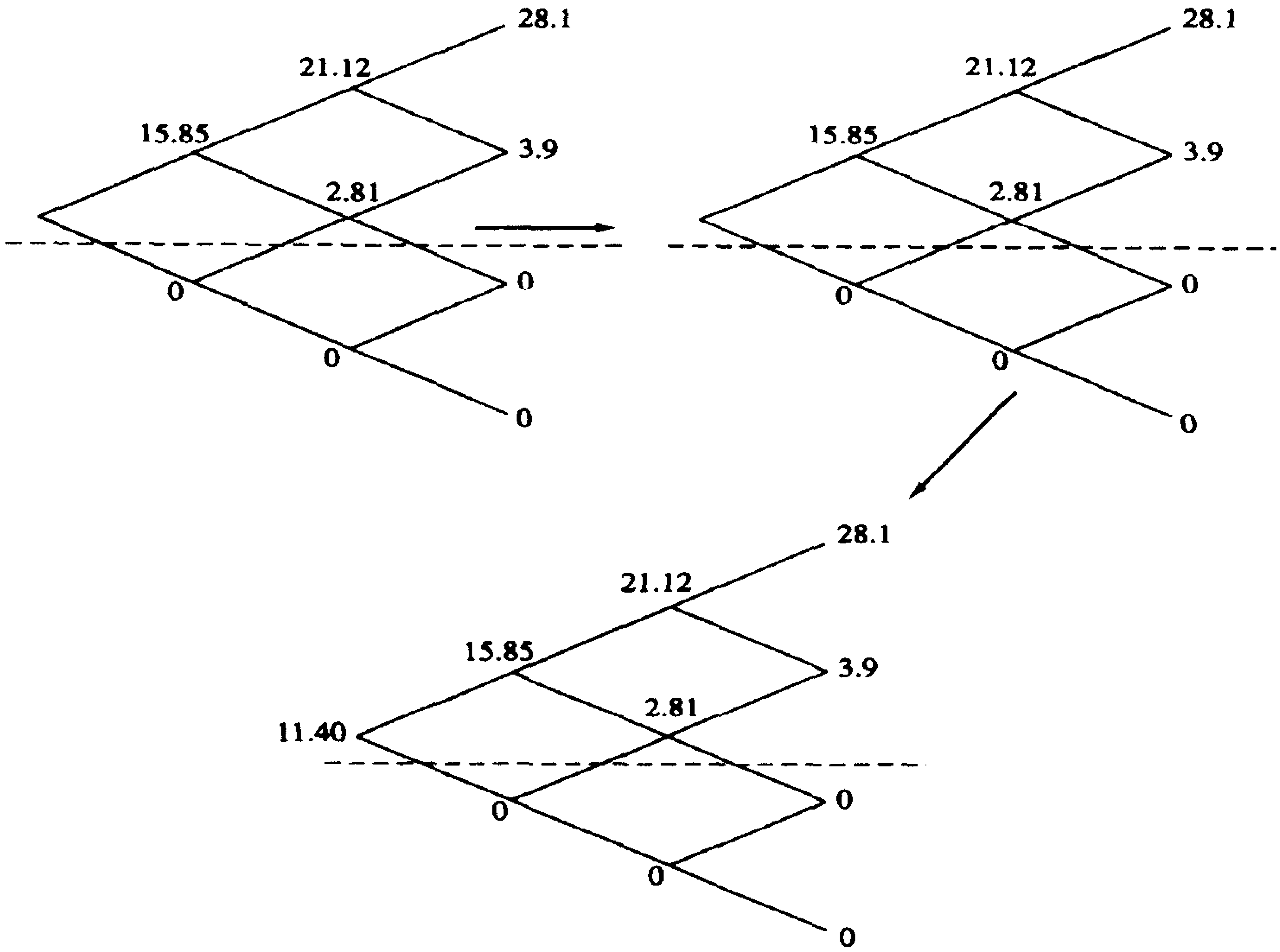


图 3-21 敲出期权的节点输入值序列

该值验证了我们先前的计算.

注意：路径计算法在期数和路径较少的情况下是简单易行的，但如果对 K 期，即 2^k 条路径计算就很困难，因为将生效的期权从失效的期权中分离出来将是很费力的.

我们发现障碍期权比标准欧式期权要便宜. 当障碍的设置越接近于正常价格时，该金融工具越不可能战胜日常价格波动，期权价格(较之普通期权)的贴水也将越多.

下表的分析就证明了上述观点：

期权种类	障碍值	期权价格
标准欧式		12.88
向下敲出期权	130	10.48
	110	12.83
向上敲出期权	160	0.17
	190	4.46

$S_0=145$，$X=145$，$r=0.06$，股息支付率$=3\%$，

波动率$=29.5\%$，$\tau=6$ 个月

该图取自 CIBC(Charles Smithson 和 William Chan 编写的《金融产品教学笔记》)

更普通的障碍期权是以同一种资产价格同时作标的资产价格和障碍价格的期权，这样的期权称为"内部"障碍期权；也有障碍期权的障碍价格与标的价格不同，这样的期权就称为"外部"障碍期权．比如，在日本的证券市场上，当美元兑日元的汇率在 80 以上时，资产组合经理就会以 15 000 点买入日经 255 指数的看涨期权，这样的看涨期权只有在美元兑日元汇率低于 79 时才算敲出． 56~57

同样地，设置了敲出障碍的看涨期权将会显著地贴水．期权的这种结构设置充分利用了日本证券市场对美元的敏感性．美元坚挺(日元贬值)有可能会使日本出口贸易型公司的股票价格上升，从而拉动整个证券市场．

障碍期权对对冲基金有特别的吸引力．对冲基金可以在卖空的同时买入期权；试图以小搏大．他们在购买敲入或敲出期权时付出的资金相对较少，但是当期权如他们所愿突破障碍以后，他们就可以大赚一笔．

当价格接近于屏障时，问题就出现了．敲出期权的买方迫切希望将价格保持在屏障之下；期权的卖方则同样迫切地想将价格维持在屏障之上．在容量大、流动性高的市场如外汇市场上，单个投资者可能会认为这过分冒险，不合实际以至于不能操纵价格．但如果有足够多的大资金投资者有共同的利益，他们肯定能够对市场价格施加压力．

规模小、流动性差的新兴市场极易受这种行动影响．在 1994 年末和 1995 年初，美国投资银行美林证券就和一只由 Michael Steinhardt 管理的基金在委内瑞拉债券市场上大动干戈．该基金拥有敲入期权，当债券价格涨到屏障附近时，期权就会上升．于是基金大量买入债券以推高债券价格．美林证券作为期权的出售者，则拼尽全力使债券价格低于屏障．一向呆滞的市场成交量飞涨．在这场较量的高潮时期，发行在外的差不多 70 亿美元委内瑞拉布拉德力债券中，有 1 亿 5 千万美元的债券换手，就此将债券价格推高 10%．美林最终以"可观"的代价赢得了这场战役的胜利．

习题

1. 利用图 3-22 的股价二叉树，并设置向下敲出的障碍为跌破 65 美元，$X=50$ 美元，$r=0.06$．求 $t=0$ 时刻看涨期权的价格．

2. 如果向下敲出障碍设为 55 美元，其他数据不变，求 $t=0$ 时刻看涨期权的价格．

3. 利用图 3-23 的股价二叉树，并设置向上敲出障碍为 115 美元，$X=85$ 美元，$r=0.06$．求 $t=0$ 时刻看涨期权的价格．

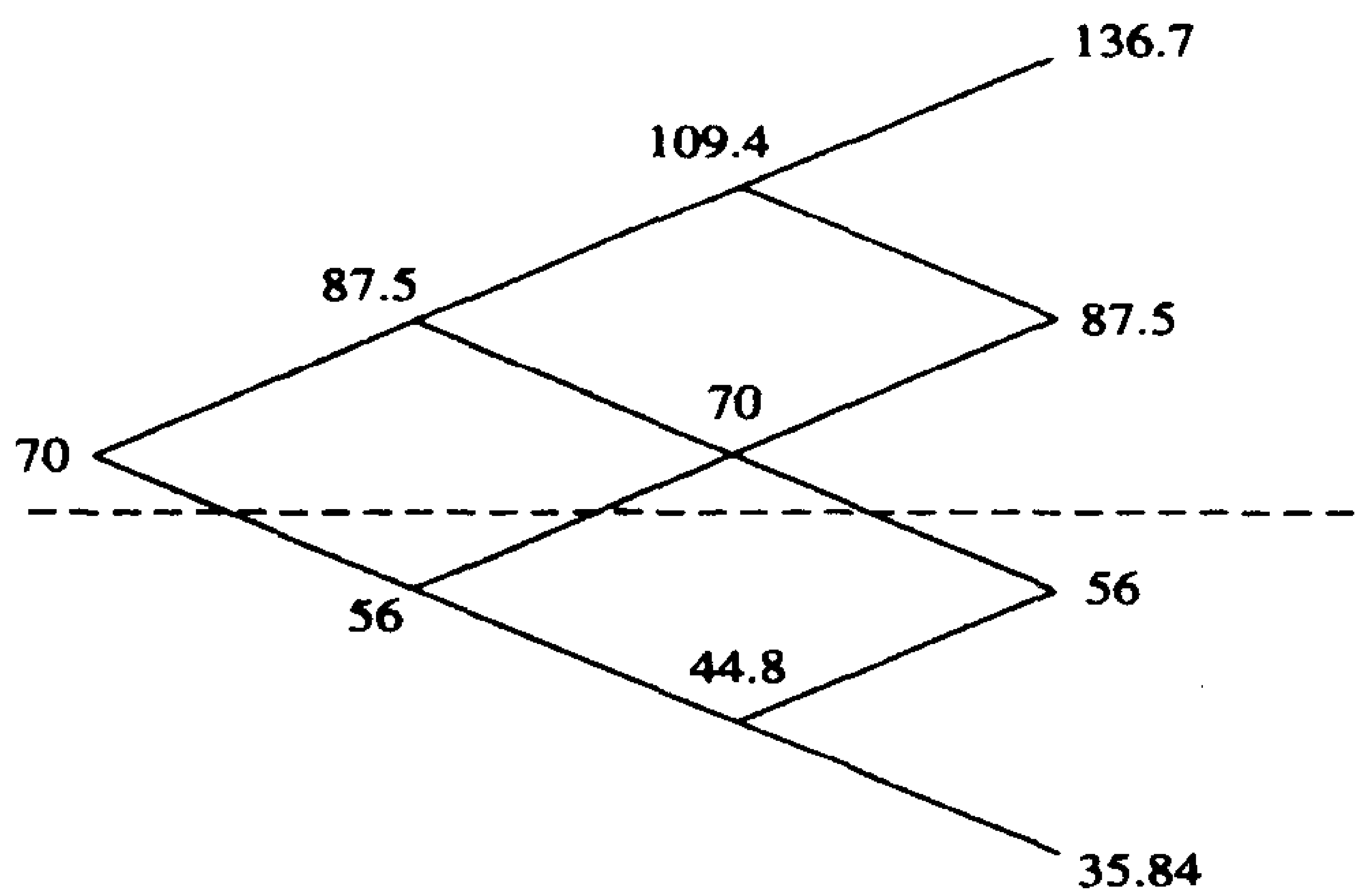


图 3-22 向下敲出障碍期权的股价二叉树

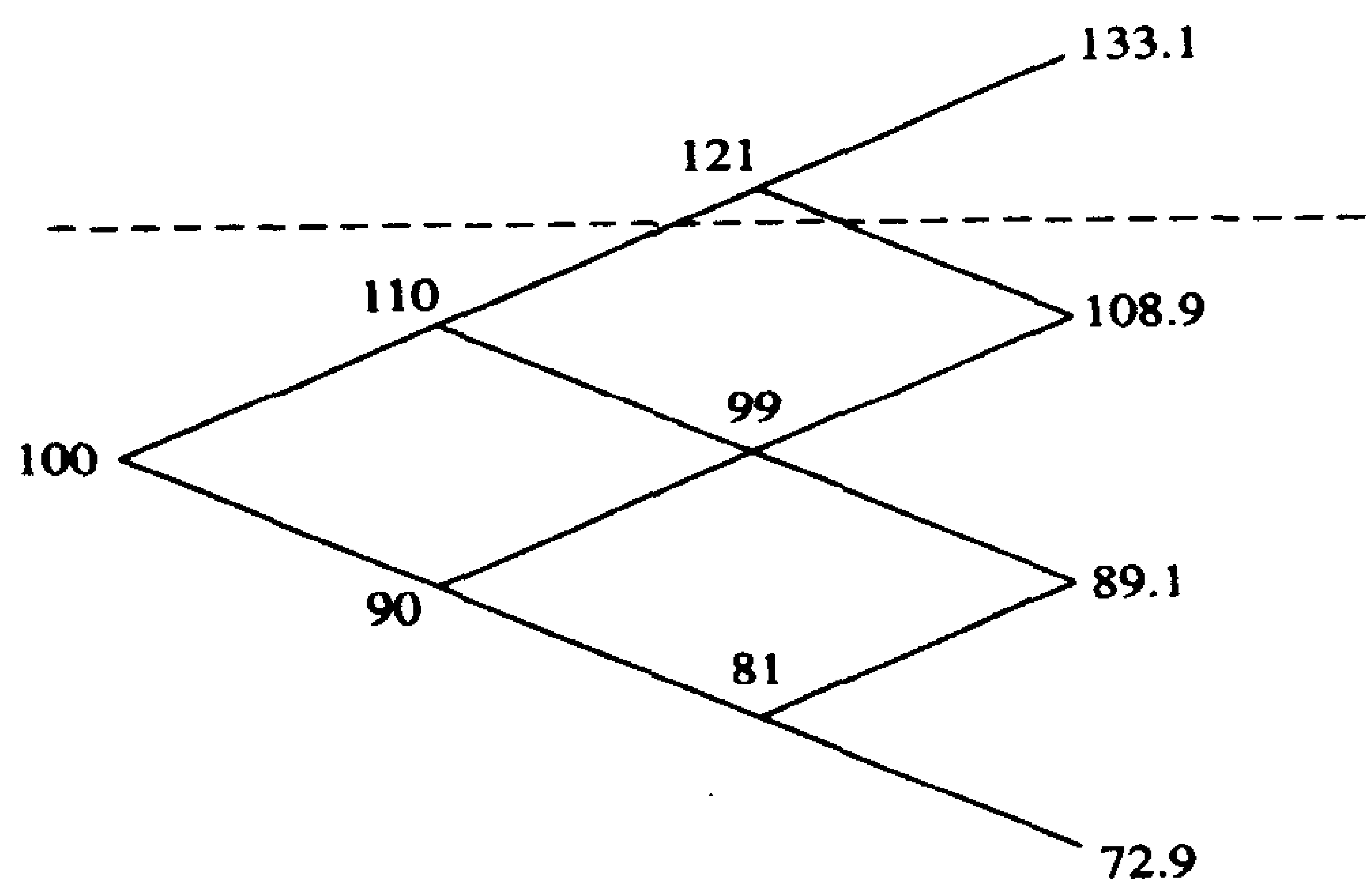


图 3-23 向上敲出障碍期权的股价二叉树

3.5 奇异期权——回望期权定价

设有一个三个月到期的回望期权，在三个月后，期权的买方有权得到以过去三个月中最高股价来计算的偿付. 所谓回望的含义就体现在这里. 应注意，为了确定期权的到期价格，需要知道的不仅仅是股票的最终价格，还需要知道股票过去每个时间点的价格(除了一些极端的情况). 为详细阐述这个概念，我们举一个例子.

例 $t=0$，股价为 100. 我们来看看这样一个二叉树模型 $S_0=100$，$d=0.9$，$u=1.2$，$r=0.05$. 以一个月为一个时间段，画出三个月的股价树，如图 3-24 所示.

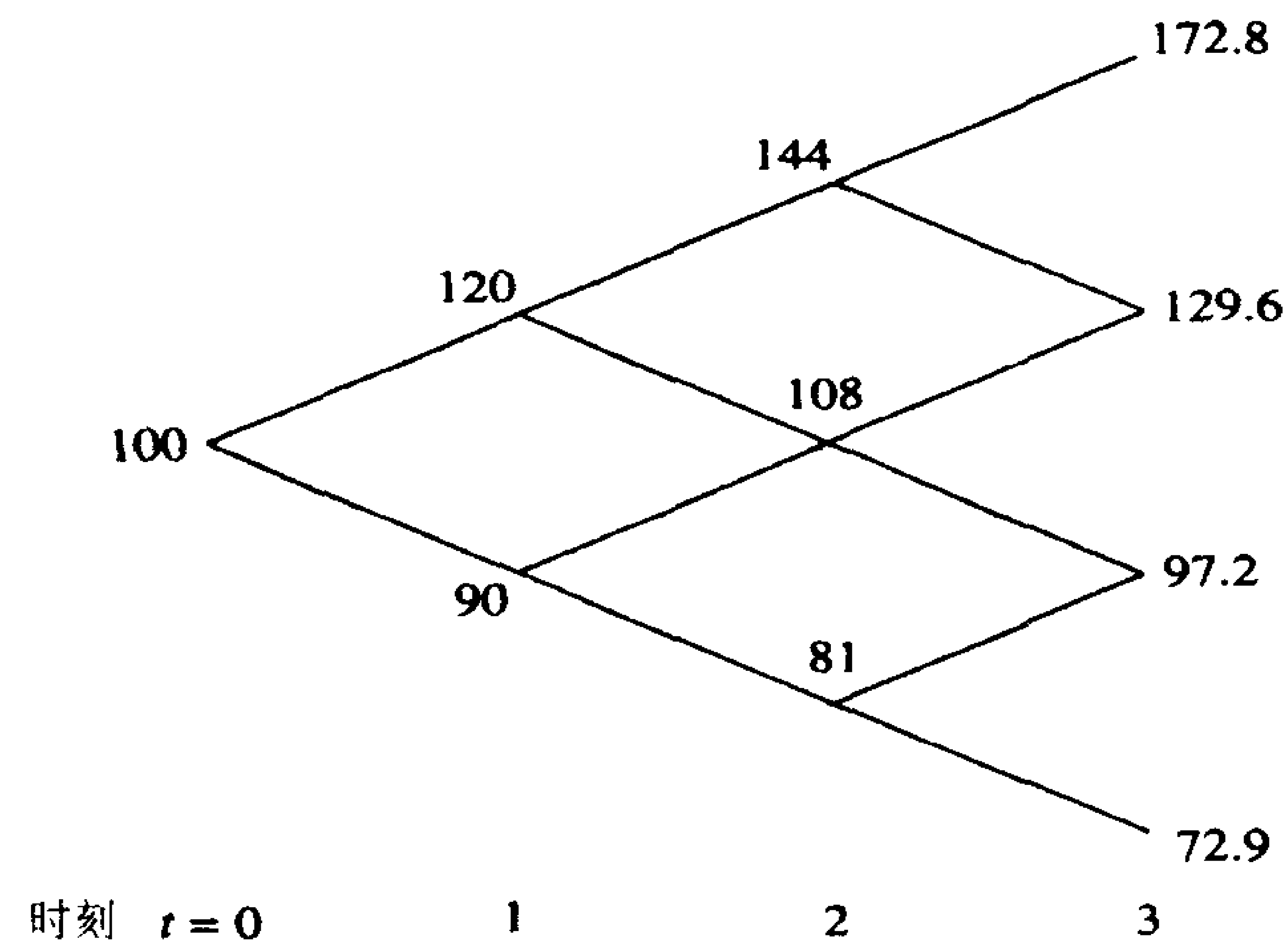


图 3-24 回望期权的股价二叉树

58~59

表 3-1 路径及该路径下的最高价

路 径	最 高 价
uuu	172.8
uud	144
udu	129.6
duu	129.6
dud	108
ddu	100
udd	120
ddd	100

表 3-2 路径的概率值

路 径	概 率	最 高 价
uuu	q^3	172.8
uud	$q^2(1-q)$	144
udu	$q^2(1-q)$	129.6
duu	$q^2(1-q)$	129.6
dud	$q(1-q)^2$	108
ddu	$q(1-q)^2$	100
udd	$q(1-q)^2$	120
ddd	$(1-q)^3$	100

为确定回望期权的价格，我们应列出所有路径和每条路径的最高价，用不同颜色的笔描出所有路径很有帮助.

然后，我们按公式(3.2)计算概率值 q：

$$q=\frac{e^{r\tau}-d}{u-d}=\frac{e^{0.05/12}-0.9}{0.3}$$
$$=0.34725$$

接下来，我们应计算与每条路径相对应的"概率值"，结果如表 3-2 所示. 为求出 $E[V_3]$，即期权在 $t=3$ 时刻的"期望价格"，我们将"概率值"一栏与"最高价"一栏对应相乘，再加总，就得到：

$$E[V_3]=115.314$$

最后，由于定价公式(2.6)要贴现，我们将 $E[V_3]$贴现得到期权在 $t=0$ 时刻的价格. 这样，我们得到

$$V_0=115.314\times e^{(-0.05)3/12}$$
$$=113.88(\text{美元})$$

回望期权价格的计算显得比较繁琐．由于该期权的性质，为确定回望期权到期日的价格，我们必须找出股价路径．读者应该知道，如果画出期权价格的二叉树展开图，我们可以根据连锁法则填入节点值并得出同样的答案．

前例所用的列表计算法或二叉树展开都会由于期数的增加而产生冗长的计算．如果有 n 期，就有 2^n 条路径．如果我们计算一年期以一个月为时间间隔的回望期权，则 $n=12$(12个月)，有 $2^{12}=4096$ 条路径．

尽管计算机可以轻松处理这种情况，我们还是希望找到计算量比较小的方法．实际上，如果计算一年期的回望期权时取一周为一个时间间隔($n=52$)，那
[60] 么速度最快的计算机也应付不了．

习题

1. 用连锁法则求图3-25中的股价树的回望期权的价格．
2. 用本节的路径概率的方法验证你在习题1中求出的价格．
3. 求图3-26中的股价二叉树的回望期权的价格．

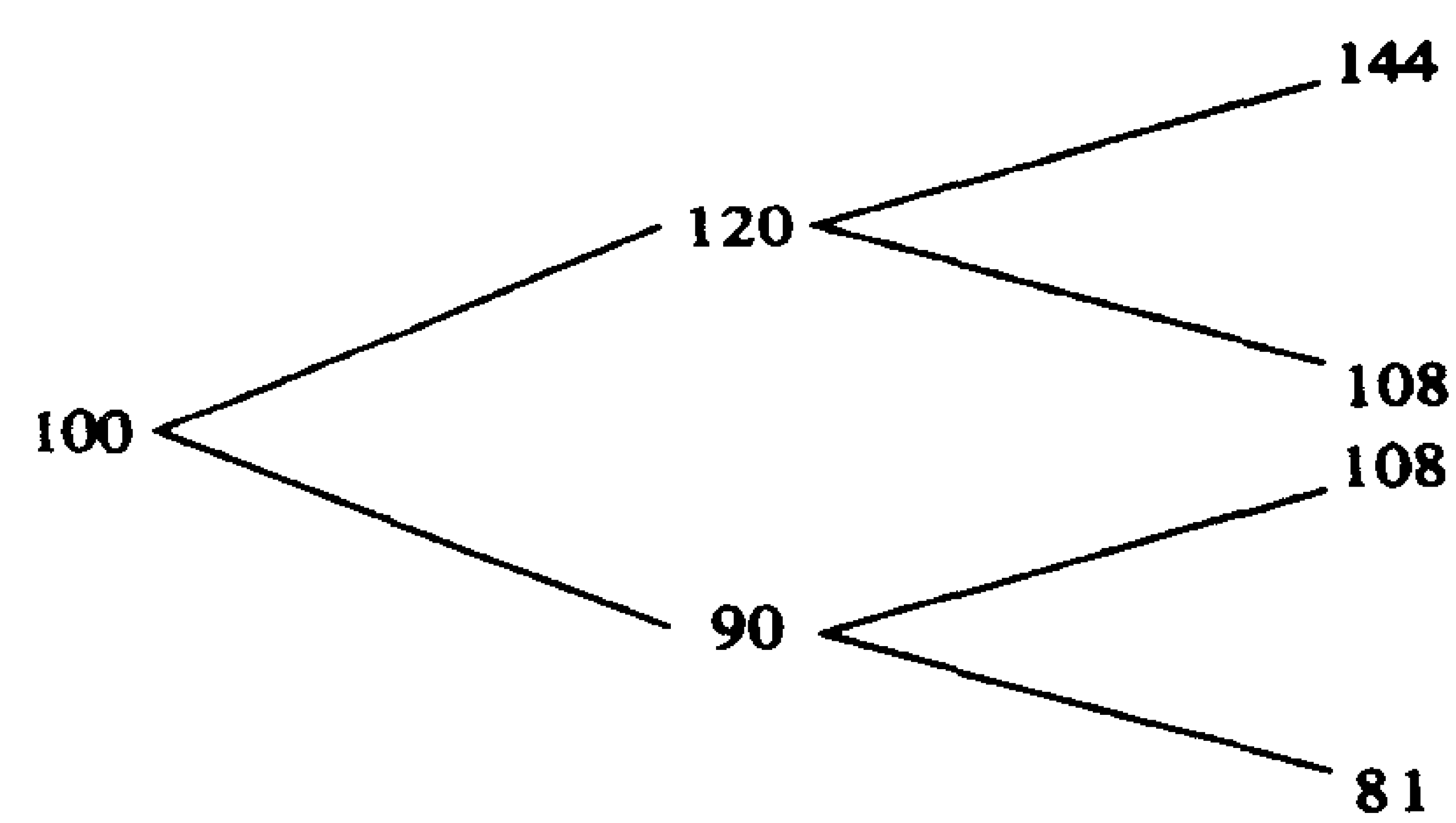


图3-25　习题1的股价二叉树

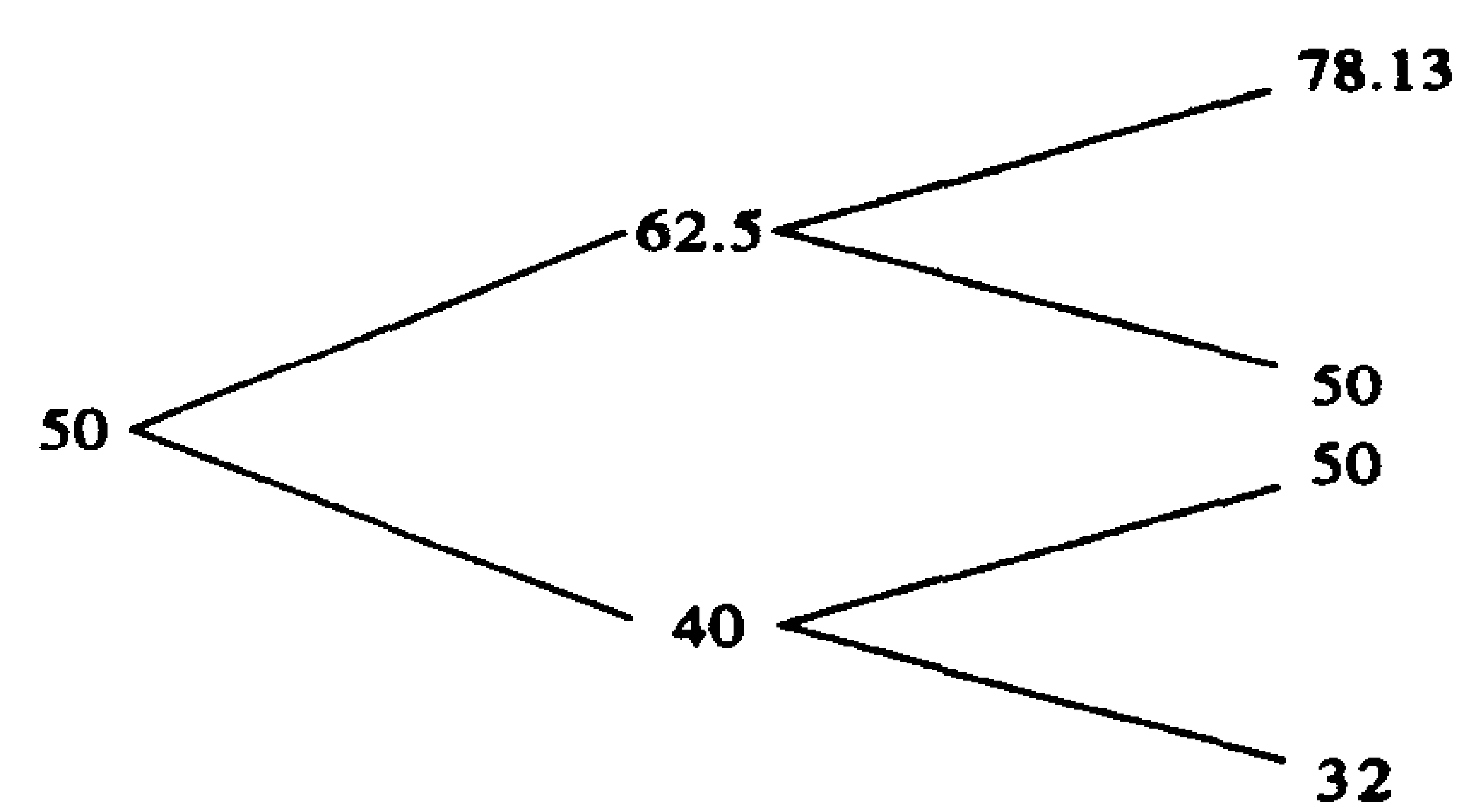


图3-26　习题3的股价二叉树

3.6　实证数据下二叉树模型分析

金融(或其他领域)中用的数学模型是为了帮助我们在分析现在的基础上预测未来．如果我们的模型是成功的，那么模型就应该与实际相符．

我们把上面的准则应用于图 3-27 的股价二叉树模型中去. 那么应怎样选择 p、u 和 d 呢?

我们希望能够通过股价行为中的重要因素来估计上面这些参数. 两个首先映入脑海的因素就是漂移率和波动率. 在一定的时间段 Δt 以后，股价 S 为随机变量，则相对回报率为比率：

$$\frac{S-S_0}{S_0}$$

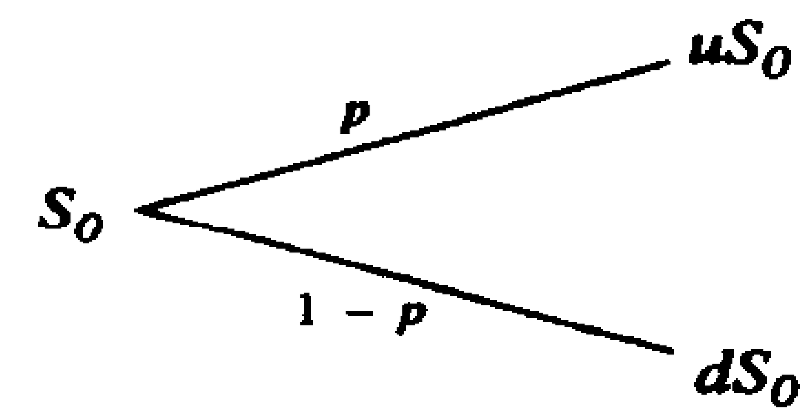


图 3-27 股价的二叉树模型

漂移率 μ 表示的是经过一个时间段以后，股价的平均变化幅度. 我们假设

$$\mu\Delta t = E\left[\frac{S}{S_0}-1\right]= E\left[\frac{\Delta S}{S_0}\right] \tag{3-4}$$ 61

即 $\mu\Delta t$ 是平均相对回报率. 所以 $1+\mu\Delta t$ 是股价比率

$$\frac{S}{S_0}$$

的平均值. 第一眼看到 $1+\mu\Delta t$ 肯定觉得奇怪，但是联想复利公式：

$$P = P_0(1+r)$$

$1+\mu\Delta t$ 项与 $1+r$ 项相对应，$\mu\Delta t$ 项与 r 项相对应.

波动率 σ 反映的是相对回报率的不确定性. 我们假设它决定了方差：

$$\sigma^2\Delta t = E\left[\left(\frac{S}{S_0}-1-\mu\Delta t\right)^2\right] \tag{3-5}$$

如果市场上存在没有波动率的金融工具 P(比如货币市场基金)，那么：

$$\mathrm{d}P = \mu P\,\mathrm{d}t$$

或者写成另一种形式：$\mathrm{d}P/P=\mu\mathrm{d}t$. 这也符合公式(3-4)的表述. 因为 $S-S_0$ 就是这里的 $\mathrm{d}P$. 同时我们可以看到：

$$P(t) = P_0\mathrm{e}^{\mu t}$$

P 的未来走势是可以确定的，实际上 P 的图形就是我们熟悉的指数函数.

如果随机变量 X 服从伯努利分布，其分布可以用表 3-3 表示，且：

$$\text{均值} = E[X] = pa+(1-p)b \tag{3-6}$$

及

$$\text{方差} = E[(X-\mu)^2] = p(1-p)(a-b)^2 \tag{3-7}$$

我们将这两个公式用于图 3-27 的股价二叉树，则根据假设有

$$1+\mu\Delta t = E[S/S_0] = pu+(1-p)d$$

且

$$\sigma\sqrt{\Delta t} = \sqrt{E[(S/S_0)-1-\mu\Delta t)^2]} = \sqrt{p(1-p)}(u-d)$$

表 3-3 伯努利随机变量

X 值	概 率
a	p
b	$1-p$

62

补充说明 为建立模型我们需要两个条件：

1. 根据实际金融市场数据的 μ、σ 值，推导出 u、d、p
2. 如何得到 μ、σ

我们下面将依此解决这些问题.

有若干模型可以得出 u 和 d，我们只讨论模拟股票价格时常用的一些简单的方法.

Hull-White 算法 令 $p=\frac{1}{2}$并用如下公式计算 u 和 d：

$$\text{(i)} \quad \frac{u+d}{2}=1+\mu\Delta t$$

$$\text{(ii)} \quad u-d=2\sigma\sqrt{\Delta t}$$

注意如果令 $p=\frac{1}{2}$，公式(i)就是公式(3-6)，公式(ii)就是公式(3-7). 总之：公式(i)和(ii)告诉我们如果已知 μ、σ 和 Δt，怎样求 u 和 d.

第二步就是标准的统计学了. 我们假设

$$\begin{aligned} S_1 &= X_1 S_0 \\ S_{k+1} &= X_{k+1} S_k \end{aligned} \tag{3-8}$$

这里 X_k 是独立的伯努利随机变量，$\Pr[S_k/S_{k-1}=u]=\Pr[S_k/S_{k-1}=d]=\frac{1}{2}$. 该等式就是对图 3-28 的文字叙述.

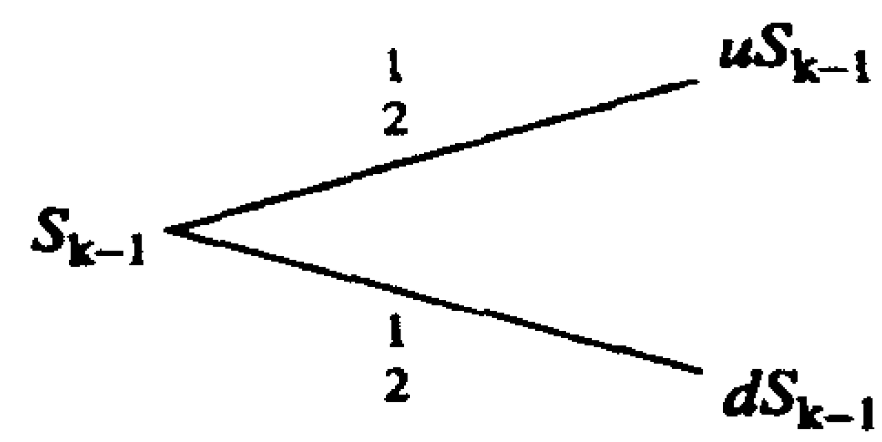


图 3-28 股价模型

从公式(3-7)我们可以得出 $\mu\Delta t$ 和 $\sigma^2\Delta t$ 的合理估计值：

$$\bar{U}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k-1)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(S_k/S_{k-1}-1)$$

其中 s^2 是

$$s^2=\frac{1}{n-1}\left[\sum_{k=1}^{n}(S_k/S_{k-1}-1)^2-n\bar{U}^2\right].$$

$\bar{U}$ 和 s^2 是来自实际市场数据 S_0、S_1、S_2，…，S_n 的样本均值和样本方差. 我们可以得出 μ 和 σ 的估计值为：

$$\mu\approx\frac{\bar{U}}{\Delta t}$$

63

$$\sigma\approx\frac{s}{\sqrt{\Delta t}}$$

当用数据估计漂移率和波动率时，我们可以为二叉树选用不同的时间间隔

Δt. 将公式(i)和(ii)中的μ、σ用它们的估计值替代，就可解出u和d. 下式为我们推导得到的公式，用图形表示为图 3-29.

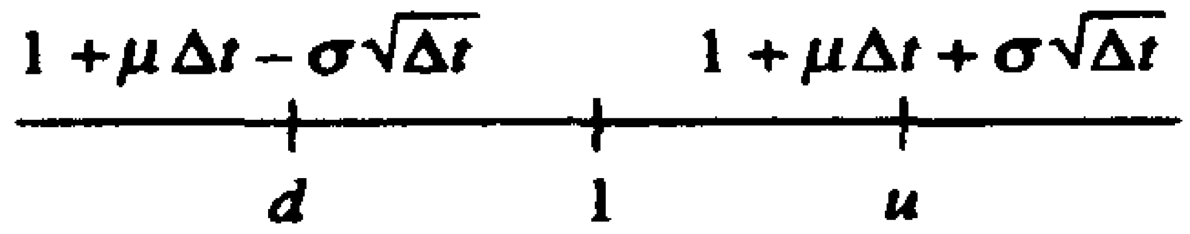


图 3-29 Hull-White 模型的解

$$u = 1 + \mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$d = 1 + \mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}$$

在 Hull-White 模型中，u和d关于漂移率μ对称.

例 为解释刚才讨论的问题，我们给出一个 Netscape 公司股票的例子. 数据是 1998 年 5 月 4 日到 1998 年 5 月 18 日的. 通过 Excel 表单公式，我们输入一栏股票价格并计算X_j、$\bar{U}$和s(如表 3-4 所示).

表 3-4 1998 年 5 月 Netscape 股票数据

日期	价格	比率	描述性统计量	
4	29.56	1.01911		
5	30.125	0.94804	均值	0.992383
6	28.56	0.96288	标准误差	0.010430
7	27.5	1.022727	中位数	0.980898
8	28.125	0.975644	众数	
11	27.44	0.98615	标准差	0.0032982
12	27.06	1.00240	样本方差	0.001087
13	27.125	1.057695	峰度	0.173060
14	28.69	0.973858	偏度	0.764779
15	27.94	0.975304	极差	0.109646
18	27.25		最小值	0.948049
			最大值	1.057695
			和	9.923832
			样本数	10

由表可知$\bar{U}=0.992-1=-0.008$，$s=0.033$，并可以求出u和d的值. 这个二叉树中所用的Δt和与数据的Δt相同. 公式u和d可以简写成

$$u = 1 + \bar{U} + s$$

$$d = 1 + \bar{U} - s$$

$$u = 0.992 + 0.033 = 1.025$$

$$d = 0.992 - 0.033 = 0.959$$

$$S_0 = 27.25 \quad (5\text{ 月 }18\text{ 日价格})$$

完整的二叉树图见图 3-30. 64

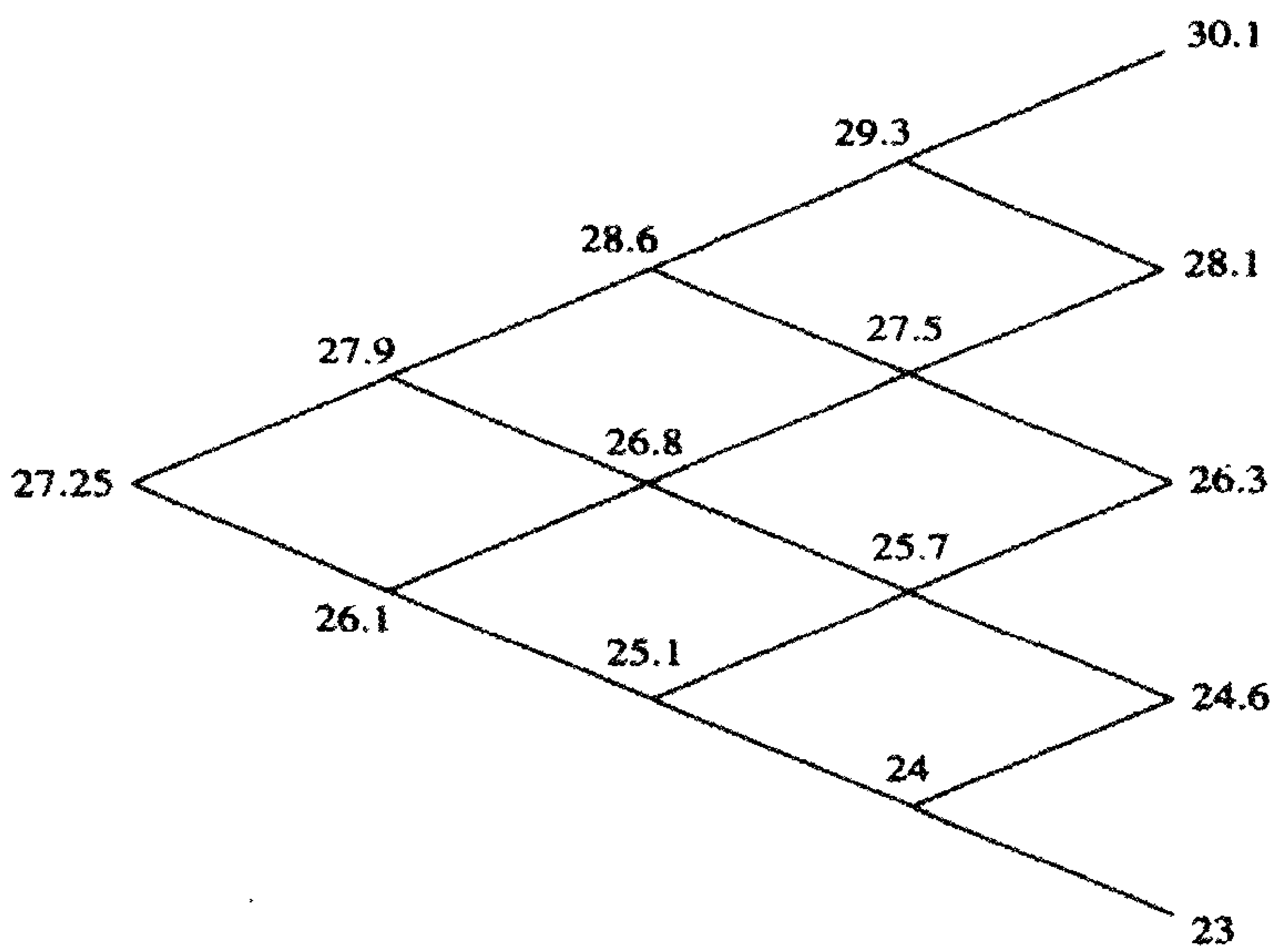


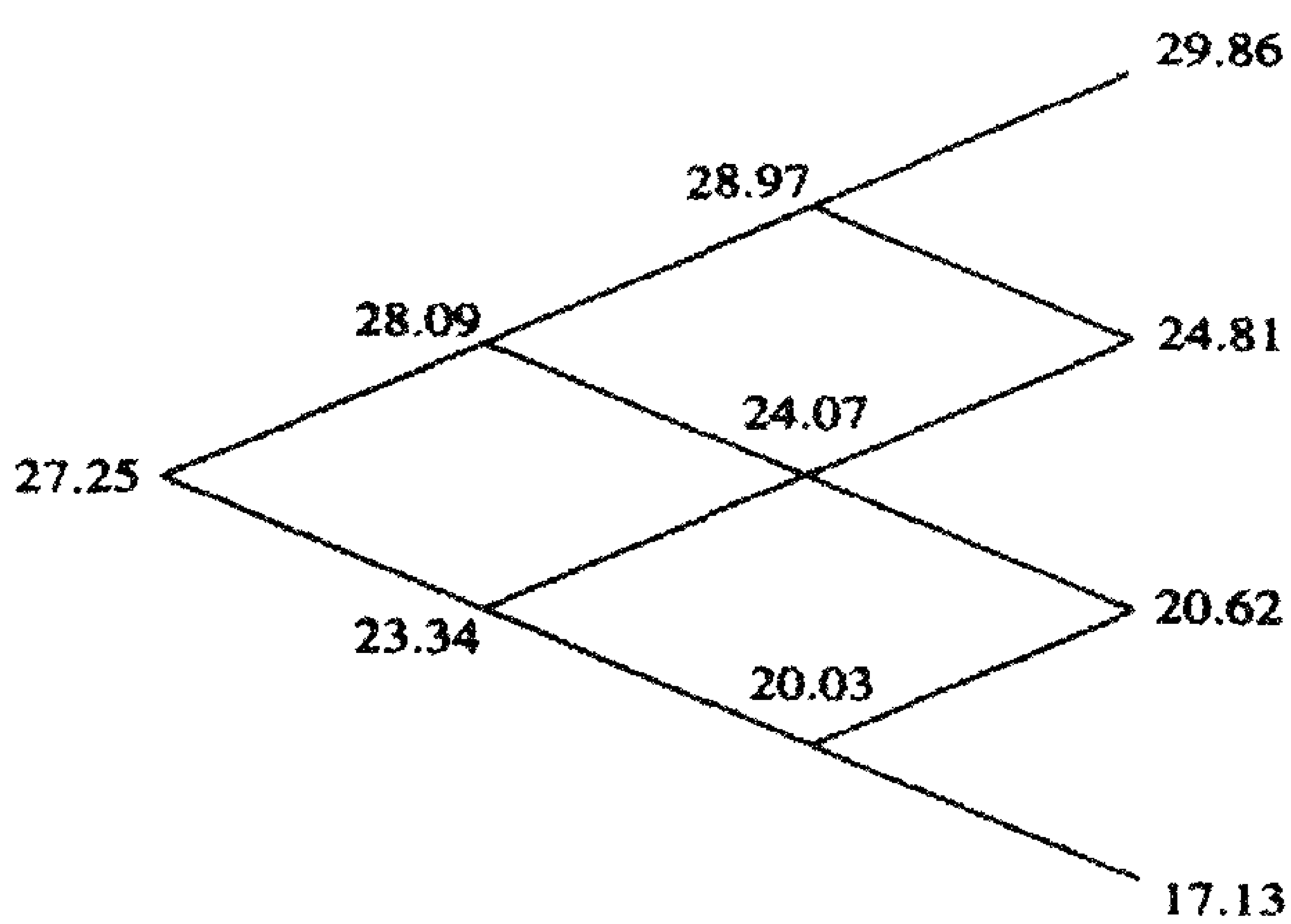
图 3-30 Netscape 股票价格二叉树：时间间隔 1 天，$u=1.025$，$d=0.959$

我们可以自己选择更大或者更小的时间间隔．比如，令 $\Delta t=7$，即以一周为一个时间段，则有

$$u = 1 - 0.008(7) + 0.033\sqrt{7} = 1.031$$

$$d = 1 - 0.008(7) - 0.033\sqrt{7} = 0.8567$$

完整的二叉树如图 3-31 所示．注意以一周为时间间隔，股价"分叉"得更快．



65 图 3-31 Netscape 股价二叉树：时间间隔 1 周，$u=1.031$，$d=0.857$

注意 我们仅采用了 Netscape 股票价格 11 天的数据．在实际中，我们需要用的数据会更多．一个谨慎的预测者在尝试预测将来价格时总会研究更多的历史数据．

3.7 N 期二叉树模型的定价和对冲风险

本章的方法说明，以 N 期股价二叉树为基础的期权价格，可以由期权在期末的价格完全决定．我们将会解释如果期权的价格与由二叉树算法得到的价格不一样，则将存在无风险套利机会．

换句话说，二叉树算法得出的结果是符合无套利原则的惟一价格．从这个角度来说，二叉树算出的价格反映了市场的真实状况．我们的解释会包括一个特殊的例子，并对本章所用的方法进行综述．

我们来验证单期二叉树德尔塔对冲的效果．我们卖出一个看涨期权（或者衍生产品）并买入 a 份股票，且：

$$a = \frac{U - D}{S_u - S_d}$$

那么，这样的对冲是否真能让我们避免市场的不确定性呢？

我们最初花掉的钱是 $aS_0 - C$，C 是看涨期权的价格．注意

$$C = aS_0 + (U - aS_u)e^{-rt}$$

$aS_0 - C$ 的值可正可负．无论情形如何，我们进行投资或借入的无风险利率都是 r.

股价上升的情况：资产组合价值 $= aS_u - U + (aS_0 - C)e^{rt}$

$$= aS_u - U + [aS_0 - (aS_0 + (U - aS_u)e^{-rt})]e^{rt}$$

$$= aS_u - U - (U - aS_u) = 0$$

这样，即使在股价上升的情况下，我们也不赔不赚，与预期的一样．

股价下跌的情况：　　资产组合价值 $= aS_d - D + (aS_0 - C)e^{rt}$

但是由 a 的定义知：$aS_d - D = aS_u - U$，所以也是盈亏相抵．换句话说，我们完全对冲掉了风险．

有人可能在想怎样从对冲情况下获利．实际上，在这种情况下，交易商的无风险收益是收取的少量佣金．

我们通过一个例子来解释多期对冲的思想．

例　股价二叉树如图 3-32 所示．我们对初始值的产生不作假设．最初的价格可以由先上升后下跌模型得出，你也可简单地认为本来就是这样．我们再给出期权或衍生产品在 $t=$ 66
2 时刻的价格，如图 3-33 所示．另外，我们再给出无风险利率．此例中，我们假设 $r=0.04879$，则 $e^r = 1.05$.

第一步　采用连锁法则，我们来完成衍生产品的价格树．该例中我们有三种方法可以计算价格．我们不准备采用概率 q 的方法来完成衍生产品价格树，因为仅当股价完全由参数 u 和 d 来决定时，概率 q 的方法用起来比较方便．而此处的价格树属于更一般情形．

我们用第 2 章的博弈论方法，由公式(2.1)：

此处 $a = (U - D)/(S_u - S_d)$．这个计算适用于有如图 3-34 形式的任何二叉树分枝．

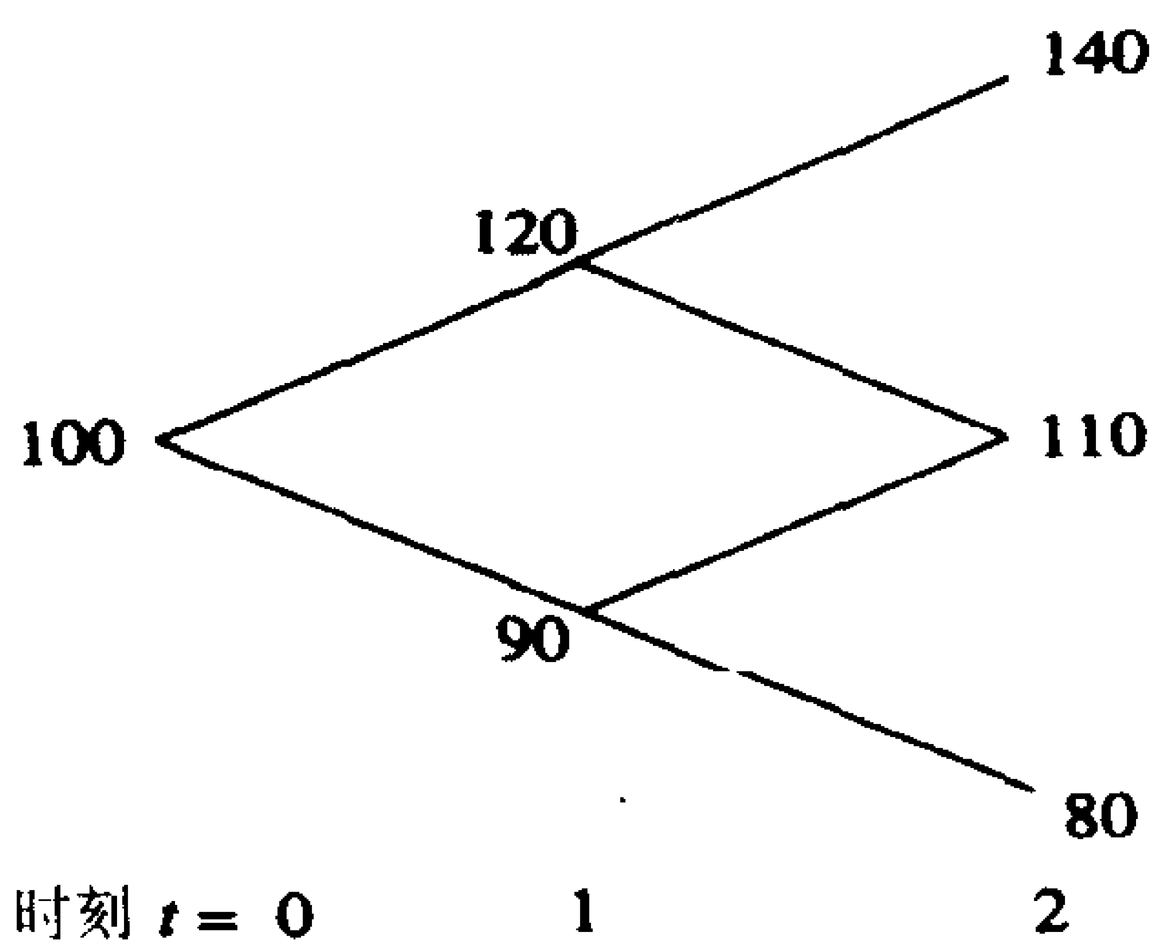


图 3-32 股价二叉树

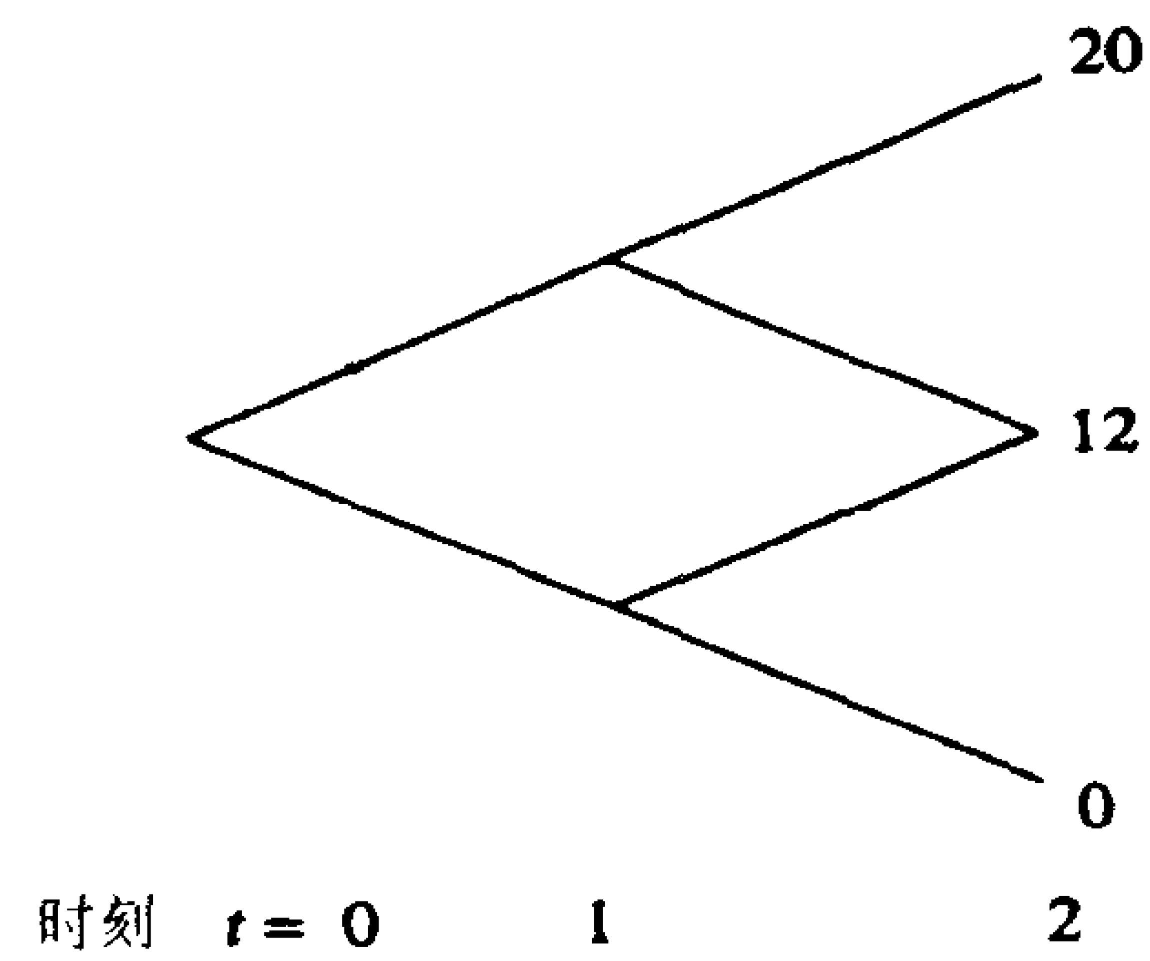


图 3-33 衍生品价格二叉树

$$V = e^{-r\Delta t}(U - aS_u) + aS_0$$

接下来计算二叉树每个节点的 V 值，并将该值记录在节点处股票价格的下方，如图 3-35 所示.

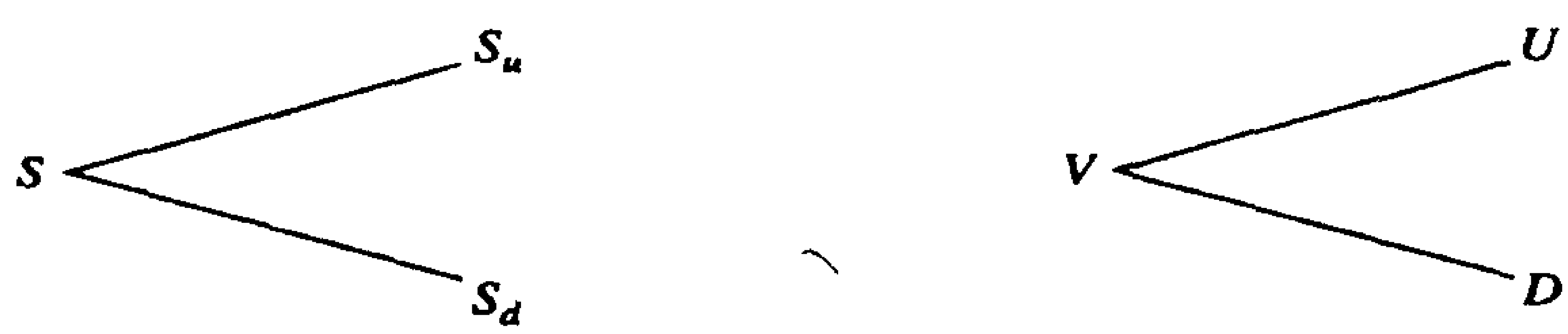


图 3-34 普通二叉树分枝

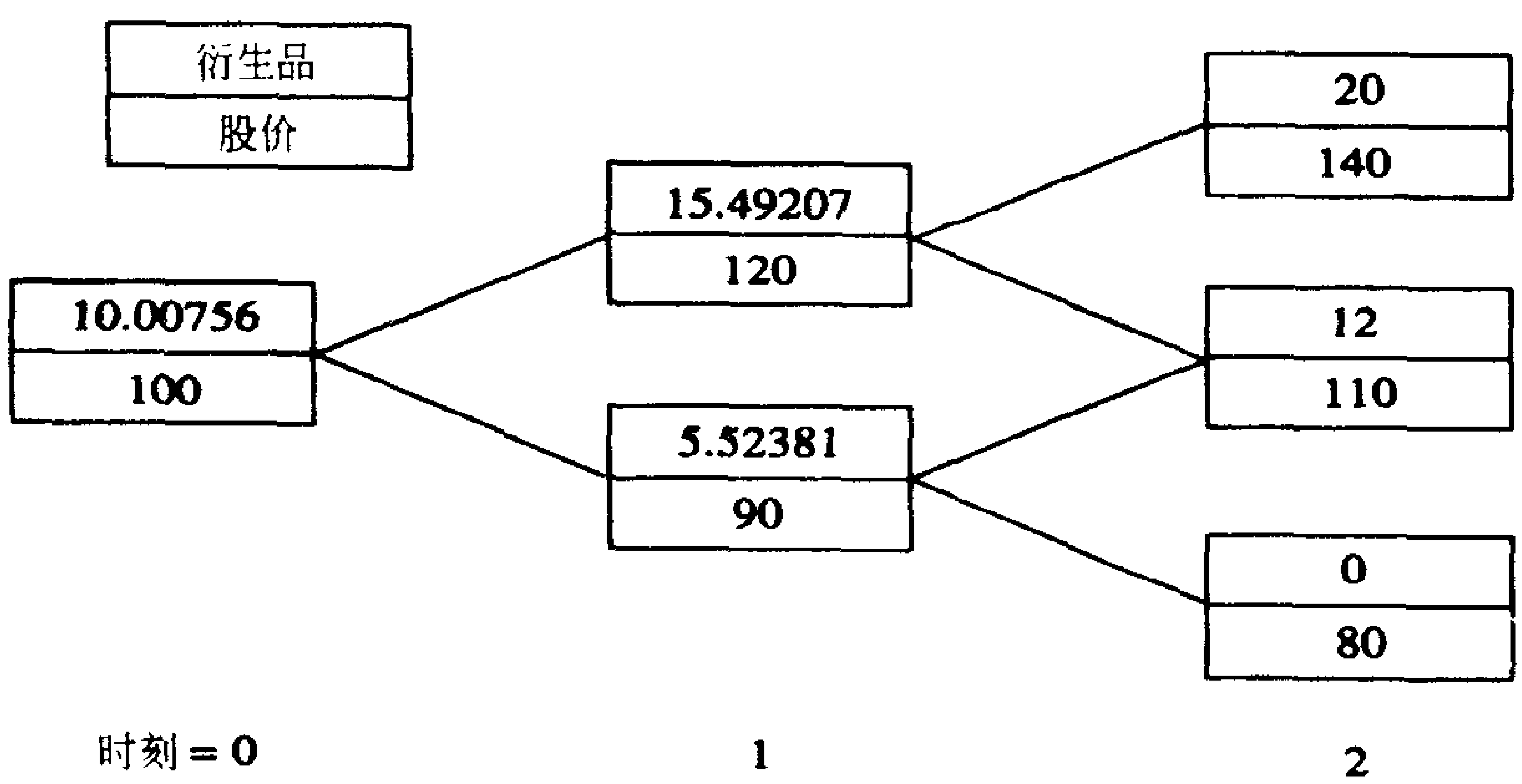


图 3-35 股票和衍生品价格二叉树的组合图

第二步 假设在第二期期末卖掉一单位衍生品(Derivative Instrument，DI)得到 10.00756 美元. 我们希望对衍生产品的空头实行对冲. 在未来不同的股价情形下，我们面临的偿付是 12 美元和 20 美元. 我们采用复制资产组合技术(第 2.3 节)，计算每期应持有的股票数.

2.3 节给出了二叉树的每个节点处应持有的股票数. 公式(2-8)给出的就是我们熟悉的比率:

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta S} = \frac{U - D}{S_u - S_d}$$

因此在时刻 $t=0$，我们应该买

$$\frac{\Delta V}{\Delta S} = \frac{15.492072 - 5.52381}{120 - 90} = 0.3322754$$

份股票．在 $t=0$ 时刻我们应借入一些钱作为我们对冲组合的一部分，我们卖掉单位衍生品(DI)的收入为 10.00756 美元，因此为了买股票，我们应借入：

$$0.3322754 \times 100 - 10.00756 = 23.21998(\text{美元})$$

我们在时刻 $t=0$ 的全部资产状况为

拥有股票	欠银行负债
0.3322754	23.21998 美元

在 $t=1$ 时刻，股票的价格可能为 120 美元，也可能为 90 美元，我们应在该时刻重新对冲．

假设股价为 120 美元．为再次对冲，我们算出 $\Delta V/\Delta S$：

$$\frac{\Delta V}{\Delta S} = \frac{20 - 12}{140 - 110} = 0.266666$$

这样，我们应该卖掉 $0.3322756 - 0.266666 = 0.06561$ 份股票．这样就减少债务 $0.06561 \times 120 = 7.8732$ 美元，我们新的资产状况是： 67~68

拥有股票	欠银行负债
0.266666	$23.21998 \times 1.05 - 7.8732 = 16.507779$(美元)

注意到我们已经在第一年的债务上考虑了利息因素，并用卖股票的钱还掉了部分债务．

我们现在从 $t=2$ 时刻开始检查这个对冲组合是否有效．我们假设第二期期末的股价是 110 美元．我们卖掉股票并将钱支付给衍生产品(DI)持有者和银行．我们来列表计算这个交易：

正(资产)	负(负债)
股票：$0.266666 \times 110 = 29.33326$	衍生产品：12 美元
	银行：$16.507779 \times 1.05 = 17.33316795$(美元)
总计：29.33326	29.33316

因此，对冲组合是有效的．我们可以完全地、精确地把风险对冲掉．在衍生产品出售过程中没有任何风险．还可以检查一下在股价是 140 美元时，这个对冲组合也可以保护投资者．

套利 注意如果现实中衍生品定价是 11 美元，我们可以通过卖掉衍生品并买入股票对冲，从而获取无风险收益．另一方面，如果衍生品价格是 9 美元，我们可以通过买入衍生品并卖空股票对冲，从而获取无风险收益．这样的交易可以使衍生品价格到达 10.00756 美元的均衡状态．

总之，为确定对冲组合，我们应按如下步骤进行操作：

1. 画出股价二叉树.

2. 用连锁法则计算衍生品价格树.

3. 从 $t=0$ 时刻起，确定对冲的股票. 股票的数量由 $(U-D)/(S_u-S_d)$ 计算得到.

4. 在 $t=1$ 时刻以及接下来的各期，应当用步骤 3 重新计算所需的股票数量.

这个方法适合于 N 期二叉树模型.

注释 可以对冲 N 期二叉树模型是不是就意味着我们可以对冲任意的衍生产品(比如说，连续情形下)呢? 答案是否定的. 即使二叉树模型通过选取足够大的 n 值，以对股价进行合理的拟合，但股价运行中固有的属性使我们不可能做出无误差的对冲调整.

例如，当股价陡降时，波动率会突然上升. 对冲时要考虑这种情况，就要缩短调整的时间段. 此外，股价可能突升或突降. 比如，微软在 2000 年 3 月 31 时股价为 $106\frac{1}{4}$. 市场突然传出政府提请反托拉斯诉讼的消息，股价在第二个交易日，即 2000 年 4 月 3 号，立刻就跌到 $90\frac{13}{16}$. 这样的股价变动是不可能对冲的. 对大多数股票来说，二叉树模型是不完美的模型，因此在此基础上建立的对冲也
69 是不完美的.

习题

1. 本题中期数 n；起初价格 S_0；上升和下跌的收益率为 u 和 d；短期利率为 r. 求单位欧式看涨期权的 Δ 对冲值.

计算时需选择二叉树中的一条路径. 为简单起见，我们建议考虑一种情况，如 $udud$，但你也可以选择其他路径.

2. 用习题 1 中的 n、S_0、u、d、X 和 r，求欧式看跌期权的 Δ 对冲值.

	n	S_0	u	d	X	r
(a)	2	100	1.1	0.9	95	0.05
(b)	3	80	1.2	0.8	100	0.04
(c)	4	60	1.3	0.8	75	0.06
(d)	4	50	1.2	0.9	45	0.03
(e)	4	40	1.1	0.7	40	0.05
(f)	5	110	1.4	0.7	120	0.06
(g)	5	90	1.3	0.9	80	0.04

3. 用第 2 题表中 n、S_0、u、d、X 和 r 值，只针对路径(b)和(c)，求这些参
70 数下的美式看跌期权的 Δ 对冲值.

第 4 章　用表单计算股票和期权的价格二叉树

我们展望的未来已成为现实，但对每个人来说都是不一样的.

——William Gibson

4.1　表单的基本概念

在第 3 章中我们知道股价二叉树的每个节点(如图 4-1 所示)都有一个价格 S_k，可以通过相邻价格乘以常数 u 或 d 得到.

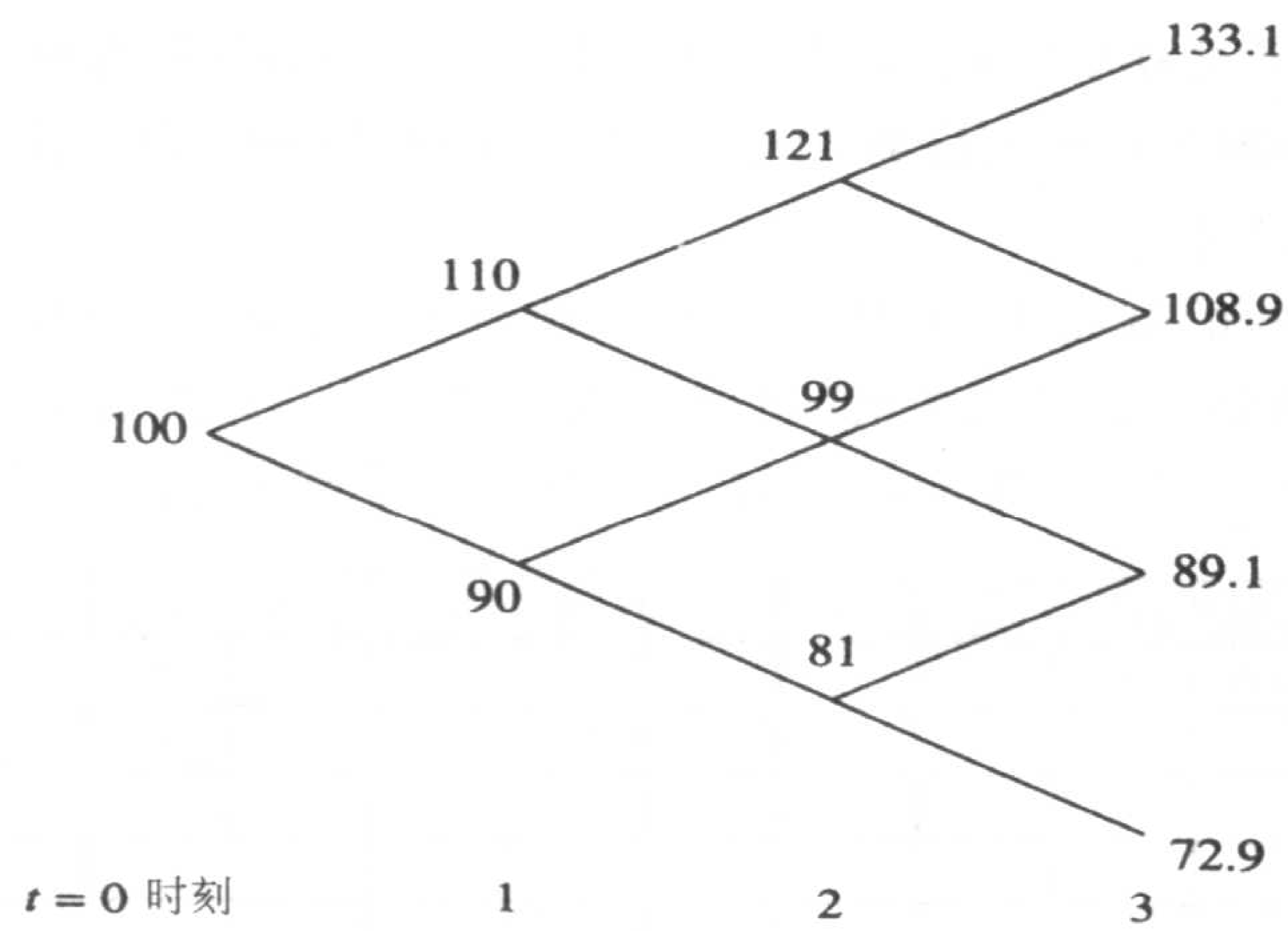


图 4-1　股价二叉树

求出节点价格的实际过程是很繁琐的. 在减少这些步骤方面，表单是很有用的工具. 为了掌握表单应用方法，我们来看一张调用计算机程序后的典型的空白表单页面(如图 4-2 所示). 每个"单元格"可以代表诸如"股价"一类的数值，或者是一个公式.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2										
3										
4										
5										
6										

图 4-2　空白表单

作为第一步，我们在 **J1** 单元格中输入值 100(用鼠标选中单元格，输入 100，然后按回车键). 当你输入时，你可以看到 **100** 先是出现在单元格之上的特殊线内. 在你敲回车键以后，数值才会出现在单元格 **J1** 中.

接下来，在 **J1** 下面做一个二叉树分枝. 二叉树接下来的两个节点是 **I2** 和 **K2**. 为生成 **I2** 值，选中 **I2**，并输入

=.9 * J1

尽管在你输入时，该公式出现在顶端特殊栏内，在你敲回车键以后，单元格中就会出现一个数值，**90**. 表单会将公式保留在单元格 **I2** 中.

这时你应该先停下来，将表单保存为“股价树”或“股票”.

我们生成的公式包含了数值 $d=0.9$. 有一个简单的办法让我们的股价树在后面的运用中更具灵活性，以便改变 d 值. 我们假设将相应的 d 值总是输在单元格 **A7** 中. 实际上，在 **A7** 中输入 **.9**，并在单元格 **B7** 中将其标记为 **d value**，可以提醒我们参数 d 是放在哪里的. 我们可以对最初的股价用同样的办法进行输入.
71~72 在 **A1** 中注入 **100** 并在单元格 **B1** 中标记其为 **Stock Price**. 为了让整个标记可见，可以改变 **B** 栏的宽度.

为利用 **A** 栏的输入值，将单元格 **J1** 改成简单的公式，**=A1**. 同时将单元格 **I2** 改成**=J1 * \$A\$7**. 式中的数值部分将不变. 这样输入后如果我们改变股价或 d 值的任一个，**I** 栏和 **J** 栏都会相应地改变. 现在表单形式就会如图 4-3 所示.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	100	股价								100	
2									90		
3											
4											
5											
6											
7	.9	d值									

图 4-3　有 6 个输入值的表单

为什么要在 **I2** 输入公式时带美元符号呢？这样可以使我们在复制粘贴该单元格的时候不会改变 **A7** 的位置. 下一步就是选中单元格 **I2** 并点复制键复制公式. 再选中新的单元格 **H3**，将公式粘贴上去. 注意现在值是 **81**. 继续将这个初始公式贴到单元格 **G4**、**F5** 和 **E6** 中去，位置都处在前一个单元格的左行和下列. 如果你要检查这些单元格中的公式输入，可以看看它与最近的右上方单元格与 d 值的乘积是否一致. 这样股价二叉树的一个分枝就填好了，并且该分枝可以随 d 值和股价初值的改变而变化.

我们可以通过 u 值，完成对其余节点的输入. 我们假设 u 值放在 **A6** 单元格并在 **B6** 中标记其为“**u value**”. 我们已对表单做了一些修改，这时存盘是个好习

惯. 建议以“模板”之类的名字保存文件副本. 我们以后将会用到这些公式.

现在在 **A6** 单元格中输入 u 值，**1.1**. 接下来，选中二叉树初始点右下方的节点 **K2**，输入公式 **=J1 * $A$6**，并回车. 这时的表单如图 4-4 所示.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	100	股价								100	
2									90		110
3								81			
4							72.9				
5						65.6					
6	1.1	u值			59						
7	.9	d值									

图 4-4　u 分枝开始后的表单

最后一步将会是非常轻松的. 选中 **K2** 生成的公式并点复制键. 接下来，依此在有输入值的单元格的右下方粘贴该公式. 如果从 **J3**，**K4**，**L5** 这样贴下去，你可以看到序列 **99**，**109**，**120**. 继续按此法将整个二叉树填完整. 填完后的二叉树如图 4-5 所示.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1	100	股价								100	
2									90		110
3								81		99	
4							72.9		89.1		109
5						65.6		80.2		98	
6	1.1	u值			59		72.2		88.2		
7	.9	d值									

图 4-5　通过粘贴得到的二叉树表单

如果你顺利地完成了这些步骤，再一次将表单存盘(仍存为“股价树”或“股票”)，并以其他文件名另存副本. 这个表单对于求期权价格将会很有用.

习题

1. 如图 4-1 所示，股价二叉树 $d=\mathbf{0.9}$，$u=\mathbf{1.1}$，用表单生成该股价二叉树并打印结果.

2. 第 3.4 节习题 1 中股价初值 $S_0=\mathbf{70}$ 并有三期. 用表单生成股价二叉树并打印结果.

3. 假设采用如下方法编辑你的“股票”表单：不在 **A7** 中输入 d 值，而输入公式 **=1/A6**. 选用 $S_0=\mathbf{100}$，$u=\mathbf{1.2}$，在新的表单中计算 6 期并打印结果. 解释为什么若干股价是相同的.

4. 用习题 3 的表单处理第 3.4 节习题 1 的二叉树. 解释为什么不能用该法重新生成图 4-1.

4.2 计算欧式期权二叉树

回顾 3.2 节，我们由股价二叉树可马上得出期权，比如一个看涨期权，到期
73~74 日的价格．在 4.1 节中生成的表单按照同样的计算要求也可以得到期权的价格．当更改 u 值或 d 值时，期权价格会自动更新，即表单可以动态变化．当然，我们最终目标是填完整个期权价格树并得出期初时候的期权价格．

第一步，确定表单中放期权价格二叉树的位置．为利用股价二叉树，我们将期权价格二叉树放在图 4-2 同一页面的第 **11** 至第 **20** 行．任一期权价格输入值都与其标的股价在同一列．这意味着最顶端的期权价格在 **J11**．

看涨期权到期日的可能价格决定于股价二叉树的期数．在 **A3** 中记录期数并在 **B3** 中标记其为 **# 期数**．我们需要一个单元格存放执行价，于是在 **A2** 中输入 **105** 并在 **B2** 中标记其为**执行价**．

5 期后的股价在表单第 **6** 行，于是我们在第 **16** 行填入期权价（以 **J11** 为树的顶端）．期权价格如何得到呢？如果到期时股价低于执行价，期权价为 **0**；如果股价高于执行价，期权价为其差值．表单中可以输入这样一个公式．

K16 的公式为

= MAX(K6-$A$2,0)

在 **K16** 中输入公式（你不一定需用大写字母）．将表单另存为“欧式看涨期权”．刚才输入的公式就是用 **K6** 中的股价减去 **A2** 中的数．如果差值为负，该单元格记 **0**．**MAX** 函数的使用使计算方便．

接下来，复制公式并粘贴到第 **16** 行的其他位置，**E** 列，**G** 列，**I** 列，**M** 列，和 **O** 列．第 **16** 行表单如图 4-6 所示．

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
11											
12											
13											
14											
15											
16	0		0		0		2.81		26.8		56.1
17											

图 4-6　期权价格树的一行

接下来是用 3.2 节介绍的连锁法则来计算期权价格树的上部分．这个过程依赖于 3.2 节计算的两个值，即我们马上要给出的套利定价概率值 q 的计算公式以
75 及贴现因子．我们首先简单地在 **A12** 中输入 **0.7564**，在 **A11** 中输入 **0.95**.

还应在相邻单元格 **B12** 和 **B11** 中输入标记 **q** 和 **exp－r**．为方便起见，在 **A13** 中通过输入公式：**=1－$A$12**，该单元格将得出 $1-q$ 的值．

现在我们用连锁法则填入 **J15** 的内容. 根据第 2.3.3 节中的公式(2-6)，将 **I16** 和 **K16** 的值取平均值并贴现，即 **J15** 中输入的公式是

=$A$11 *($A$13 * I16+$A$12 * K16)

该公式实质就是：

$$e^{r}[(1-q)\mathbf{I16}+q\mathbf{K16}]$$

的变形. 输入完成后单元格会出现值 **2.02**.

我们只需输入一次这个公式，否则如果得每次输入，就会觉得表单效率低下，笨拙难用. 复制公式一次并粘贴到期权价格树的所有节点. 这样，最终可以得到期权树最高点的值为 19.7. 这就是用连锁法则得出的期权现价.

表单的修正 尽管我们的期权——股票二叉树表单值得保存，但缺陷是贴现率和 q 值需要输入. 我们可以对这个缺陷进行修正. 在 **A5** 中输入利率，在 **B5** 中输入相应标记.

为了在计算时使用该单元格，在 **B10** 中标记 **exp r**，在 **A10** 中输入下面公式：

=EXP($A$5)

再在 **A11** 中输入下列公式得出的正确贴现因子：

=1/$A$10

最后一步是在 **A12** 中输入套利定价概率 q 值. 这个概率值在 2.5 节公式(2-5)中已经给出. 公式是：

=($A$10-$A$7)/($A$6-$A$7)

输入该公式后，参数值 u、d、r，股价或执行价的改变都会生成新的股票价格树. 最后，一旦表单建立完成，繁琐冗长的计算过程就会变得轻松自如.

习题

1. 用"欧式看涨期权"表单求看涨期权价格. 已知 $t=0$ 时刻，股票价格为 120 美元，执行价为 130 美元，到期日为未来第 5 期，每期利率为 4.5%，$u=1.05$，$d=0.88$. 在表单底部记录看涨期权的价格. 执行价格改为 125 美元、120
美元后，再在表单底部记录看涨期权的价格. 打印表单. 76

2. 用"欧式看涨期权"表单求看涨期权价格. 已知 $t=0$ 时刻，股票价格为 65 美元，执行价为 70 美元，到期日为未来第 5 期，每期利率为 5%，$u=1.1$，$d=0.91$. 在表单底部记录看涨期权的价格. 将利率改为 6% 和 7%，并在表单底部记录看涨期权的价格. 打印表单. 为什么利率上升期权价格就会上升呢?

3. 用习题 1 中的"欧式看涨期权"表单求看涨期权价格，参数值不变，$X=130$. 但是到期日取未来 8 期.

提示：应当复制粘贴第 **17** 行和第 **27** 行并生成新 3 期的价格.

4. 用习题 2 中的"欧式看涨期权"表单求看涨期权价格，参数值不变，$X=70$. 但是到期日取未来 7 期.

提示：应当复制粘贴第 **17** 行和第 **27** 行并生成新 3 期的价格.

4.3 计算美式期权价格二叉树

有时提前执行期权会盈利更多一些. 如 1.2.2 中所述，允许提前执行的期权称为*美式期权*. 期权的价格可以由二叉树模型计算，但是如 3.3 所述，节点的输入得按照一定的顺序，这样复制资产组合的方法才能用于二叉树.

我们在 4.2 中生成了一张采用连锁法则对欧式看涨期权进行定价的二叉树表单. 我们也可以很容易地调整公式使之符合提前执行的期权定价，但是你会发现调整后的价格与欧式期权的价格是一样的. 金融理论认为看涨期权提前执行不能提高收益[1]. 但美式看跌期权更有趣.

我们对 4.2 节中的期权二叉树进行调整，使之变成美式看跌期权. 表单的第 **16** 行用于记录一个 5 期的看跌期权可能的到期价格.

到期时的这些期权值多少钱呢？当股价高于执行价时，期权价格为 0；当股价低于执行价时，期权价为执行价与股价的差值. 简而言之，我们可以说期权价格为 0 除非“执行价格”减“股价”是正值，为正时我们就取该正值为期权价格. 在 **K16** 中相应的输入的公式应是：

=MAX($A$2-K6，0)

前面提到 **A2** 就是存放执行价的地方. 敲入公式并将文件另存为“美式看跌”. 刚才输入的公式就是从 **A2** 中取出执行价并减去 **K6** 中的数值. 如果差值为负，
77 该单元格记为 0.

下一步，复制公式并粘贴到 **16** 行的其他位置，**E** 列，**G** 列，**I** 列，**M** 列和 **O** 列. 如用 4.2 节中同样的参数，表单 **16** 栏会如图 4-7 所示.

	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O
11											
12											
13											
14											
15											
16	46		32.8		16.8		0		0		0
17											

图 4-7 美式看跌期权二叉树的一行

16 栏以上部分需要对与欧式看跌期权相对应的值进行调整. 将欧式看跌期权的价格转换为美式看跌期权并不难. 选中以上任一单元格，例如 **J15**，将公式改为原先连锁法则公式与 **A2－J5** 两者的最大值. 后一值就是我们提前执行期权

[1] 参见 Hull, J. C., *Options, Futures, and Other Derivatives*, 3d ed., Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ. 1997, pp. 162-165.

的利润．该公式可写为：

$$=\mathbf{MAX(\$A\$11*(\$A\$13*I16+\$A\$12*K16),\ \$A\$2\text{-}J5)}$$

接下来，复制公式，粘贴到整个二叉树节点处．粘贴时可以看到有些节点值增加了，整个二叉树填完后，最高点处的值为 **5**．这就是提前执行期权中需要修改的所有部分．

习题

1．用“美式看跌”表单计算看跌期权价格．已知 $t=0$ 时刻，股票价格为 125 美元，执行价为 120 美元，到期日为未来第 5 期，每期利率为 6.5%，$u=1.3$，$d=0.96$．确认需提前执行的节点．

2．用“美式看跌”表单计算看跌期权价格．已知 $t=0$ 时刻，股票价格为 115 美元，执行价为 100 美元，到期日为未来第 3 期，每期利率为 6%，$u=1.1$，$d=0.6$. 确认需提前执行的节点．

3．用“美式看跌”表单计算看跌期权价格．已知 $t=0$ 时刻，股票价格为 125 美元，执行价为 120 美元，到期日为未来第 5 期，每期利率为 1%，$u=1.05$，$d=0.96$. 确认需提前执行的节点．

4．用“美式看跌”表单求出一个美式看涨期权的价格．将“美式看跌”改为“美式看涨”时，需要重新编辑单元格 **K16**，将 **\$A\$6-K6** 改为 **K6-\$A\$6**．复制并粘贴到 **16** 行的其他节点处．再同样编辑单元格 **J15** 的公式．在其他节点处复制粘贴新的 **J15** 公式．现在重新完成 4.2 节习题 1，结果就是美式看涨期权的价格．新答案与原答案一致吗？ 78

4.4 计算障碍期权二叉树

欧式看涨期权应持有期权至到期日．如 3.4 节所述，通过对股价设置障碍(如 115 美元)可以改变这类期权．如果股价在到期日前任一时刻突破障碍，期权就无效．这是奇异期权的一个例子．

为得出该期权价格二叉树，在电脑中打开欧式看涨期权文件，另存为“障碍期权”．在图 4-8 中可以看到股价的参数值．

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	100	股价								100			
2	105	执行价							90		110		
3	5	期数						81		99		121	
4							72.9		89.1		109		133
5	0.05	利率				65.6		80.2		98		120	
6	1.1	u值											
7	.9	d值											
8	0.76	q值											

图 4-8　股价二叉树

如设置障碍为 115 美元，敲出期权在 L 列其右任一节点处，价格均为 0，因此应将相应期权二叉树节点值设为 0. 这些单元格的连锁法则公式也应换为 0. 这样，剩余部分的连锁法则公式就会给出正确的障碍期权二叉树.

前面介绍的方法的一点局限性就是只有在股票起始价格是 100 美元的时候适用. 好的算法(见习题 4 的提示)是不管初始价格如何变化，公式可以在应为 0 处自动生成 0. 如果当前的股价固定，输入的执行价越低则期权价格会上升.

习题

1. 用"欧式看涨"表单求以下障碍看涨期权的价格. 已知 $t=0$ 时刻，股票价格为 65 美元，执行价为 70 美元，到期日为未来第 5 期，每期利率为 5%，$u=1.1$，$d=0.91$. 障碍价格为 80 美元. 如果股价在到期日前任一时刻上升突破 80，则看涨期权无效. 打印表单.

2. 如果习题 1 中障碍为低于 55 美元或者低于 70 美元，计算障碍看涨期权价格. 打印表单.

3. 用"欧式看涨"表单对比以下两种看涨期权的价格. 已知 $t=0$ 时刻，股票
79 价格为 100 美元，到期日均为未来第 5 期，每期利率为 4%，$u=1.1$，$d=0.91$.

期权 # 1：执行价为 95 美元的欧式期权.

期权 # 2：跌破看涨期权，屏障为 95 美元，执行价为 95 美元.

4. 求若干看涨期权的价格. 已知 $t=0$ 时刻，股票价格为 80 美元，执行价为 76 美元或 82 美元，到期日为未来第 5 期，每期利率为 4.5%，$u=1.05$，$d=0.88$. 屏障为上升突破 87、93 或 98.

提示：可以在表单中自动生成 0. 在单元格 **A15** 中输入障碍值. 按如下方法编辑 **K16**：将"**MAX…**"替换为

IF(K6 >$A$15，0，MAX…)

这个 IF 语句将 **K6** 值与障碍值作比较. 如被突破，取 0；如没有突破，就用原来的公式. 同样编辑其他期权单元格.

4.5 计算 *N* 期二叉树

本章介绍的技巧告诉我们什么呢? 40 期至 100 期的期权定价二叉树可以足够准确地对交易价格进行定价分析. 对于多达数百期的节点有没有更方便的表单方法? 我们愿意处理这么巨大的二叉树吗? 是的，是有方便的方法；不过，我们不想要庞大的二叉树.

80 本章是表单概念的介绍，本书的后面部分需要以这些概念为基础.

第 5 章　连续时间模型和 Black-Scholes 公式

比赛并不总是属于快者，正如战争并不总是属于强者，这正是我们为什么对结果要打赌的原因.

——DanParker

5.1　连续时间股票模型

在过去的四章中，我们学习了股票和期权的离散模型. 这些模型从计算角度看非常有用，在第 9 章中我们再讨论. 现在我们将讨论连续模型.

令 $S(t)$代表某股票在 t 时刻的价格. 由以下公式给出 S 的模型.

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB \tag{5-1}$$
81

其中，μ、σ 是常量，B 服从布朗运动. 这个股价模型是由保罗·萨缪尔森在 1965 年首次提出的[1]. 将其与 Bachelier 在 1900 年提出的模型比较起来进行研究是件很有意思的工作[2].

我们将就此理论展开详尽的探讨，因此学的时候可以仔细一些. 我们先看一下此模型的离散形式，这有助于我们更深层次地理解公式(5-1)，然后再回到连续模型，并由此推导出 Black-Scholes 公式.

5.2　离散模型

令 $S(T)$代表 T 时刻的股价. 根据二叉树模型，我们给定一个时间段 Δt，并令：

$$S_1 = e^{\mu\Delta t} S_0$$

且

$$S_{k+1} = e^{\mu\Delta t} S_k$$

则，$S_k = e^{\mu\Delta t}\cdots e^{\mu\Delta t} S_0$，其中乘积项含有 k 个 $e^{\mu\Delta t}$，简写成：

$$S_k = e^{\mu k\Delta t} S_0$$

令 $T = k\Delta t$，则有：

$$S_k = e^{\mu T} S_0 = S(T)$$

最后得到的公式表示 k 个小区间的影响同一个大的时间段 $T = k\Delta t$ 带来的效果是

---

[1] 参见 Samuelson P. A. "Rational Theory of Warrant Prices," *Industrial Management Review*, 6 (1965), PP. 13-31.

[2] 参见 Bachelier, L., "Théorie de la spéculation," *Annales du Science de l'École Normale Supérieure*, 17 (1900), pp. 21-86. English translation in *The Random Character of Stock Market Prices*, ed. Cootner, P. H., Cambridge, MA: MIT Press(1964), pp. 17-78.

一样的.

到现在为止的模型只是针对连续复利，它也是下面比较熟悉的微分方程的解：

$$\frac{dS}{dt} = \mu S$$

也就是

$$S(T) = e^{\mu T} S_0 \tag{5-2}$$

即，如果我们令公式(5-1)中的$\sigma=0$，将得到上式. 这是一个确定性的公式. 然而，股价却并不具有公式(5-1)表示的可预测性和决定性. 我们现在将更深一步

82 探讨这一公式.

令 Z 代表均值为 0、方差为 1 的标准正态随机变量.

随机变量的特点由它的概率密度函数完全给定. 对每一个常数 a，$Z\leqslant a$ 的概率由下面积分计算：

$$\Pr[Z \leqslant a] \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-x^2/2} dx \tag{5-3}$$

如果定义

$$S_1 = e^{\mu \Delta t} e^{cZ_1} S_0$$

其中，Z_1 代表标准正态分布的一个值，c 是常量. 重复这一过程，可得股价序列 S_2，$S_3\cdots$

令

$$S_k = e^{\mu \Delta t} e^{cZ_k} S_{k-1}$$

假设 Z_k 都是独立分布的标准正态随机变量.

重复的乘积项也可以表达成以下公式：

$$S_k = e^{\mu k \Delta t} \exp[c(Z_1 + \cdots + Z_k)] S_0 \tag{5-4}$$

这个模型与(5-2)相比，包含随机变量，因此更接近实际. 然而，该模型有一个不足之处我们必须加以纠正. 公式(5-4)中有两个漂移项量的来源：第一个来自 $e^{\mu \Delta t}$ 中的 μ，它的作用类似于债券和货币市场基金中的利率. e^{cZ} 是另一个漂移量的来源. 我们希望所有的漂移量由 e^{cZ} 表示.

利用如下随机变量 Z 的一个重要等式，我们可以达到此目的：

$$E[e^{cZ}] = e^{c^2/2} \tag{5-5}$$

在这里利用公式(5-5)就可以对模型进行标准正态变换，并对漂移量进行合并. 公式(5-5)说明：

$$\exp[cZ - c^2/2]$$

的期望值是 1. 我们综合这个因素进行考虑，对 S_1 进行重新定义：

$$S_1 = e^{\mu \Delta t} \exp(cZ - c^2/2) S_0$$

这样原先第 2 个因素表示的随机变量的漂移率为零，因为：

$$E[S_1] = e^{\mu \Delta t} S_0$$

模型现在变成：

$$S_k = S_0 e^{\mu k \Delta t} \exp[c(Z_1 + \cdots + Z_k)] e^{-kc^2/2}$$

这个公式还可写得更紧凑些．因为 Z_1，…，Z_k 是独立正态分布变量(均值为 0，方差为 1)，因此：

$$W_k = Z_1 + \cdots + Z_k$$ 83

是一个均值为 0、方差为 k 的正态随机变量．现在模型可表示为：

$$S(T) = S_0 e^{\mu k \Delta t} e^{cW_k} e^{-kc^2/2} \tag{5-6}$$

该公式看起来有点复杂，接下来对其中的各项分别进行分析：

- S_0 是股票的初始价格($t=0$)
- $e^{\mu k \Delta t}$是起决定性作用的漂移因素(复利因子)
- e^{cW_k}是随机因子
- $e^{-kc^2/2}$是修正因子

注意：这个离散模型比二叉树模型的意义更丰富，因为在

$$S_1 = e^{\mu \Delta t} \exp(cW_1 - c^2/2) S_0$$

中，允许 S_1 取任何正值．由于 $\exp(cW_1 - c^2/2)$无漂移项(均值为 1)，有人会认为 S_1 接近 $e^{\mu \Delta t} S_0$，但是在小概率下，它可以大到 $10^6 e^{\mu \Delta t} S_0$．很容易通过输入特定的值来模拟具体的价格路径(见习题 2、3、4)．你可以设

$$S_0 = 1, \quad \mu = 0.10, \quad c = 0.40, \quad \Delta t = 1$$

在表单上分别取 $k=1$，…，42，并对每一步通过从标准正态分布中选择随机数 Z_j 的方法进行模拟．图 5-1 显示了进行模拟的一个路径．

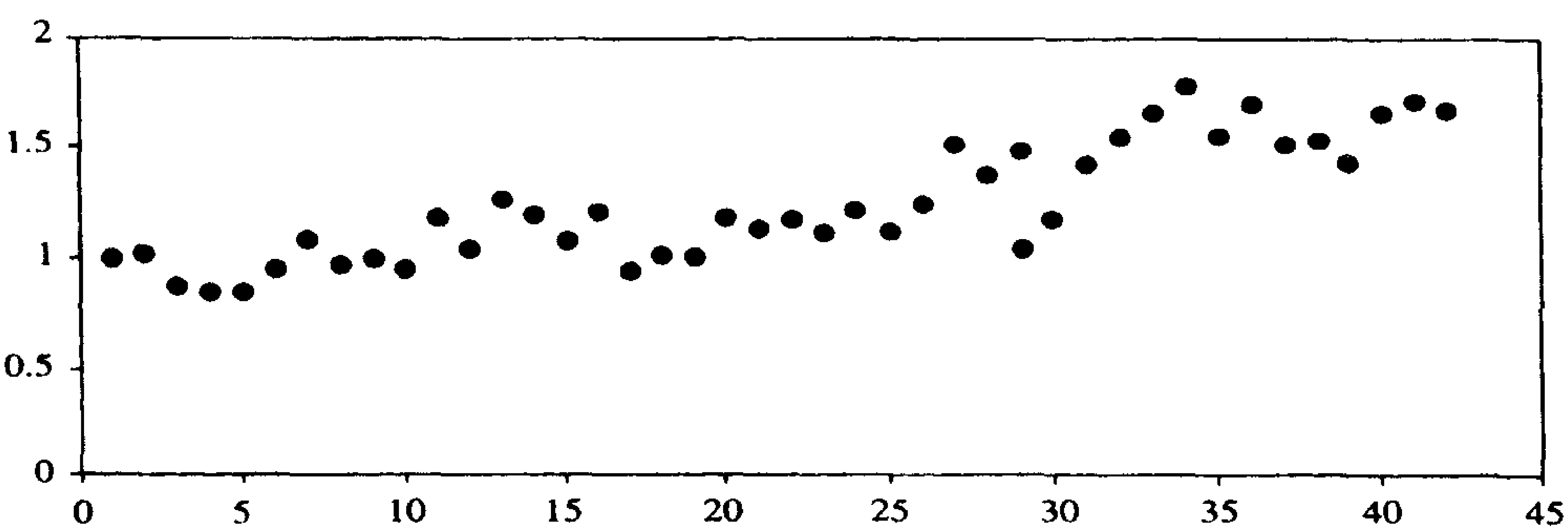


图 5-1 遵循对数正态分布的股价的一个路径

公式(5-6)还可以做一些修改．公式(5-6)是将时间分成小的增量 Δt，并考虑 k 步运行的影响．一段固定的时间 $T=k\Delta t$ 可以分解为许多小时间段．针对同样的时间 T，可以分成不同的 k 个区间，但区间长度应做相应调整．

但应注意的是 W_k 的方差随着 k 的增加而增加．W_k 的方差为 k，因此 k 越大，W_k 值离均值越远．为了使得 cW_k 的总的方差独立于 k，需要对常量 c 随 k 进行调整． 84

我们可以在 c 和 k 之间建立一个关系式，使得 cW_k 的方差等于 $\sigma^2 T$，具体做法如下：

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(cW_k) &= c^2\,\mathrm{Var}(W_k)\\ &= c^2 k = \sigma^2 T\end{aligned}$$

这样公式(5-6)中的 $c^2 k$ 就可以被替代，模型可写成：

$$S_T = S_0 e^{\mu T} e^{\sigma W_T} e^{-\sigma^2 T/2}$$

对一些项进行合并，就可得到我们需要的股票模型：

对数正态模型

$$S_T = S_0 e^{\sigma W_T + (\mu - \sigma^2/2)T} \tag{5-7}$$

记住，W_T 是均值为 0、方差为 T 的随机正态分布变量. 对数正态模型有两个参数，μ 和 σ. 现在看几个例子看看这些参数怎样影响股价.

图 5-2 是对数正态分布的两个模拟图. 注意两图中都没有一个明显的趋势. 这是因为 $\mu=0$. 第二个图比第一个波动更大.

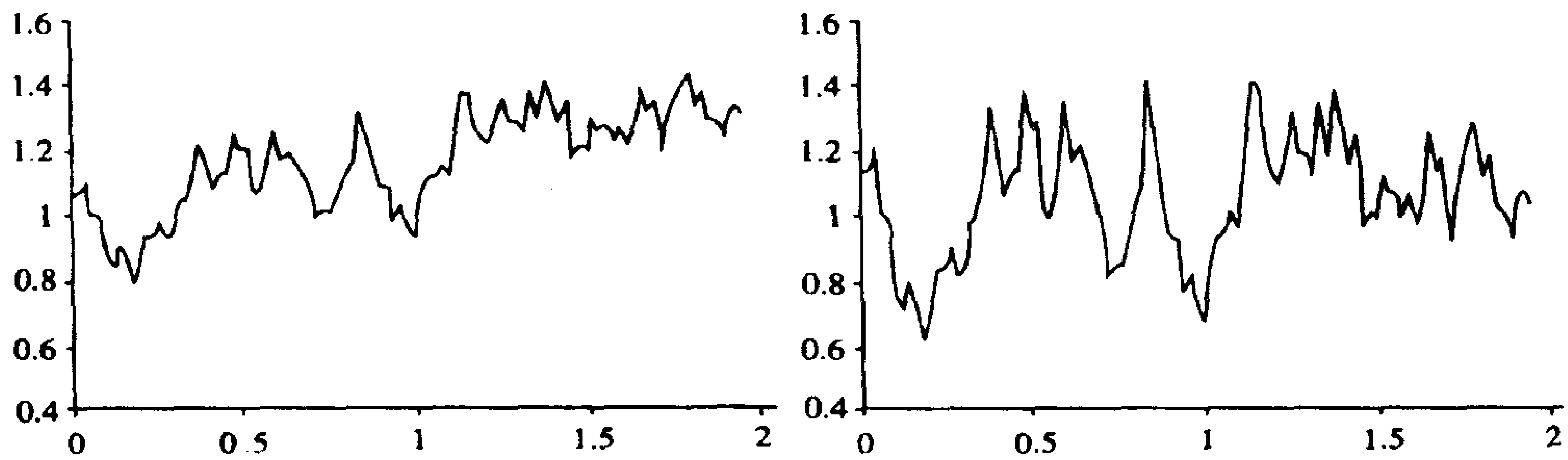


图 5-2

注：$\mu=0$，$\sigma=0.5$ 及 $\sigma=1$

现在我们引入一些具有内在上升趋势的股价图. 图 5-3 包含两个模拟图，第一个上升趋势较弱，第二个上升趋势明显. 当 μ 远大于 σ 时，虽然每次 Z 的模拟值不同导致图形不同，但上升趋势是非常明显的.

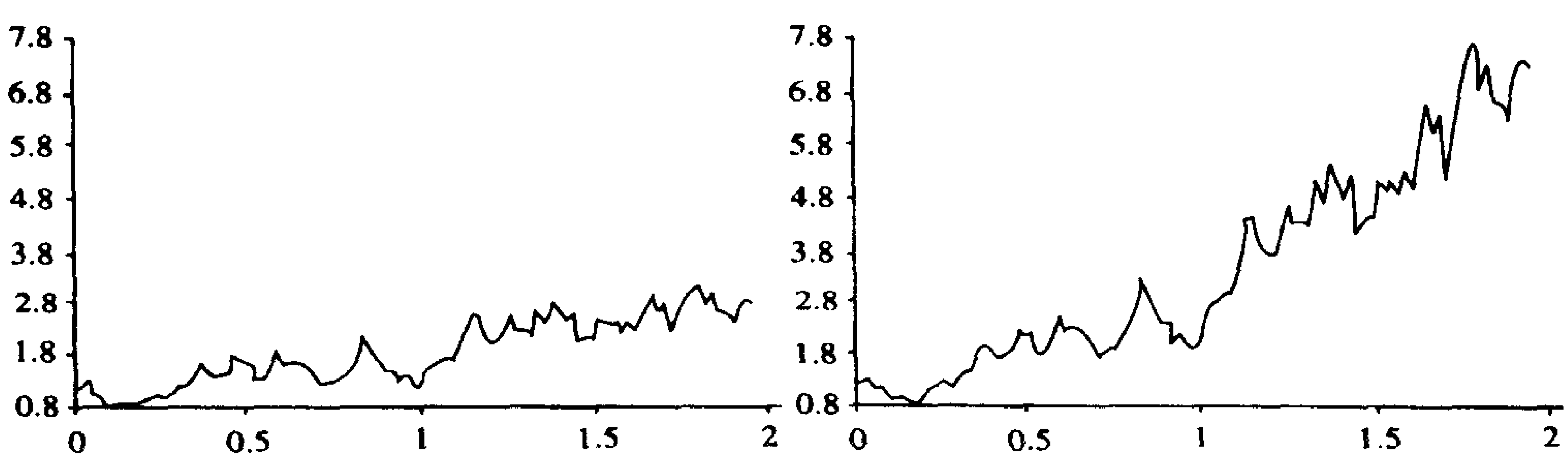


图 5-3

注：$\mu=0.5$ 及 $\mu=1$，$\sigma=1$

如果画出图 5-3 的对数图，则可看到更多信息. 大多数网上金融服务机构直接画出股价图(如 DLJdirect、ETrade、Bigcharts 等公司)，但是“雅虎”和“股票大师(Stockmaster)”在他们的图形中使用股价对数图.

图 5-4 显示了一个内在上升趋势较小的公司的股价图，以及一个内在上升趋势较高的公司的股价图. 读者请仔细研究这些例子直到熟悉为止，这些例子对理解股价模型至关重要.

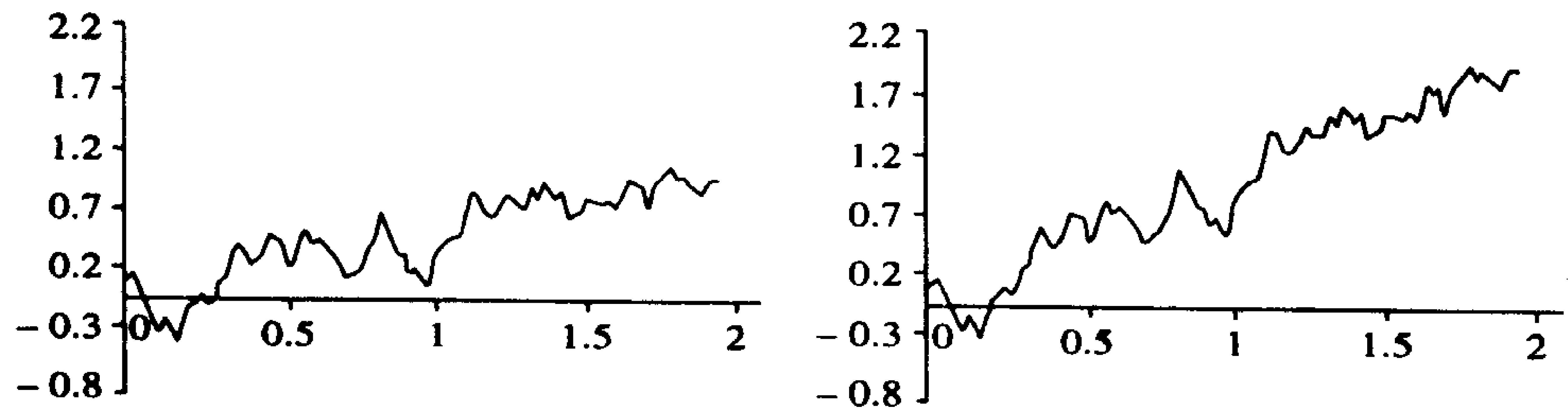


图 5-4 股价对数图

注：$\mu=0.5$(左图)及 $\mu=1$(右图)

等式 5-7 是股价的合理模型吗? 似乎它太简单了，没能体现所有对股价有影响的金融、经济、政治、全球环境因素.

现在看一个例子. 现将等式(5-7)两边取对数，得：

$$\ln S(T)=\ln S_0+\left(\mu-\frac{\sigma^2}{2}\right)T+\sigma W_T$$

$\ln S_0+(\mu-\sigma^2/2)T$ 是一个线性公式，σW_T 将围绕该直线波动. 因此，如果我们(采用对数纸)描绘股价的对数图，我们可以看见这些点落在一条直线上，如果模型更接近现实的话，会有一些点偏离直线.

图 5-5 是 TeleBras 公司在 1998 年 1 月 10 日至 2 月 20 日的股价图表. 这个图表非常符合线性规律性. 在六个星期的时间内，都具有这一特点. 所以说，这个模型至少对该股票在一段时间内有用.

我们已经将离散型模型改写为等式(5-7)的形式，再回到开头的方程(5-1)，即：

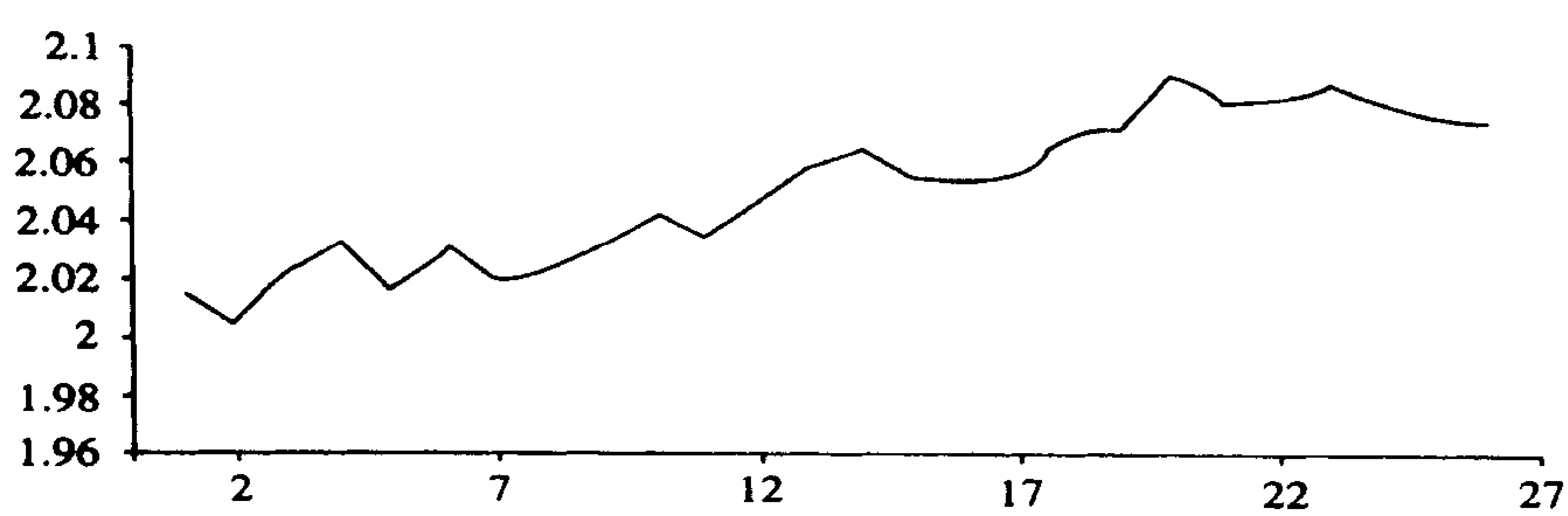


图 5-5 TeleBras 股票的股价对数图

$$ds = \mu S dt + \sigma S dB$$

布朗运动项最为关键. 在 5.9 节中，我们将显示如何构造布朗运动. 但有一种方法可以使方程(5-1)中的布朗运动研究变得简单.

5.3 连续模型的分析

方程 5-1 是一个随机微分方程(SDE). 大多数的 SDE 没有简洁的封闭形式的解，但幸运的是，方程 5-1 却存在. 也就是说，可以找到一个随机过程在适当条件下微分后满足上面的 SDE. 这确实给我们带来了方便.

该方程的解就是几何布朗运动：

$$S_t = S_0 \exp[\sigma B_t + (\mu - \sigma^2/2)t] \tag{5-8}$$

这正是我们前面见过的公式，即具有连续时间变量 T 的离散模型(5-7). 注意，我们并没有求解 SDE，我们只是给出(5-8)是它的解.

这里，B_t 是均值为 0、方差为 t 的正态随机变量. 由此得到的就是股价的几何布朗运动模型(GBM).

注意：

$$\ln\left(\frac{S_t}{S_0}\right) = \sigma B_t + \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$$

右边的表达式是一个均值为$(\mu-\sigma^2/2)t$、方差为 $\sigma^2 t$ 的正态随机变量.

我们将采用修正的股价模型对欧式看涨期权进行定价. 在此之前，要对股价模型进行参数估计. 在几何布朗运动模型中，有两个变量：波动率 σ 和漂移率 μ. 但在定价欧式看涨期权时，只需要估计 σ，公式中并没有用到 μ. 不过，这两个值如何采用股票价格估计我们都要给出.

几何布朗运动参数估计

85～87 假设我们得到了在一段较长时间$[0, T]$内的股价数据记录. 这段时间由 n 个长度相等的子区间 Δt 组成. 再假设我们知道每个子区间末的股价，将股价表示为：

$$S_i\text{:第 } i \text{ 个子区间末的股价}$$

样本观测值为 $n+1$ 个.

第一步 计算如下时间序列值：

$$U_i = \ln(S_{i+1}) - \ln(S_i)$$

将得到数值序列 U_1，U_2，…，U_n，但是，在整理数据前，由几何布朗运动模型，U_i 值满足如下等式：

$$U_i = \sigma B_{t_{i+1}} - \sigma B_{t_i} + (\mu - \sigma^2/2)\Delta t \tag{5-9}$$

几何布朗运动 $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ 具有下面这些性质：

- $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$ 是一个正态随机变量，方差为 Δt，均值为 0.

- 这些差是相互独立的随机变量.

第二步 计算系列数值 U_1，U_2，…，U_n 的均值和方差.

令 $\overline{U}$ 表示均值，则：

$$\overline{U} = n^{-1}\sum_{i=1}^{n} U_i$$

样本方差用 S^2 表示，则：

$$S^2 = (n-1)^{-1}\sum_{i=1}^{n}(U_i - \overline{U})^2$$

这些统计数据是总体 U 的均值和方差的理论值的估计值. 公式(5-9)表明，U 的观测值的均值为 $(\mu-\sigma^2/2)\Delta t$，方差为 $\sigma^2\Delta t$.

第三步 解方程

$$\overline{U} = (\mu - \sigma^2/2)\Delta t$$

和

$$S^2 = \sigma^2 \Delta t$$

得到 μ 和 σ. 很容易得到：

$$\mu = \frac{\overline{U} + S^2/2}{\Delta t} \text{及 } \sigma = S/\sqrt{\Delta t}$$ 88

例 以下是 IBM 公司股票 1997 年 10 月 28 日到 12 月 9 日的收盘价. 若两个逗号之间无数据，则表示纽约股票交易所该天休市.

99.375，98.25，95.812，98.5，，101.625，101.938，102.75，101.062，

99.5，，97.688，99，96.625，99.125，101.5，99.125，101.5，，103.5，

102.125，103.062，104.75，105.562，，103.125，107.375，109.75，

109.5，，112.562，110.75，110.375，109.25，112.25，，113.062，110.375

共有 32 个股价. 为了估计 μ 和 σ，我们用一个空白表单，在 A2 到 A33 处输入这些股价. 接着，在 B 栏处输入价格的对数值，在 B2 处输入公式

=LN(A2)

则 B2 单元格将显示结果为 4.59890057. 选中从 B2 开始的 B 栏. 在编辑菜单中选择“填充”，对数公式就都被拷贝到所有选中的单元格中了.

为了完成第一步，需要在 C 栏处生成 U_i 的值，在 C2 处输入公式

=B3−B2

则 C2 单元格结果为−0.0113853. 选择 C 栏单元格，在编辑菜单中选择“填充”，求差的公式就会被拷贝到所有被选的单元格中. 有些 C 栏中的内容需要被删除，这是因为原始数据中的“，，”与几天休市的对应，没有合适的 Δt. 要删除它们，就先选中该单元格，再选择编辑菜单中的“删除”命令. C33 也应被删除.

第二步很快就能完成. 如果你用的是微软的 Excel 的话，要获得 C 栏的均值，只需在任何空白单元格内键入公式

=AVERAGE(C2 : C33)

该式将计算 C 栏中 U_i 的均值，并忽略空白单元格. 要得到 S，在任何空白单元格内键入

$$=\mathbf{STDEV(C2:C33)}$$

我们将得到 $\bar{U}$ 值为 0.00264441，S 为 0.020256795.

第三步，以年为时间单位计算 μ 和 σ. 一个交易日对应于

$$\Delta t=\frac{1}{365}$$

因此两个参数的估计值是：

89 $$\hat{\mu}=\frac{\bar{U}+S^2/2}{\Delta t}=1.04 \quad 和 \quad \hat{\sigma}=S/\sqrt{\Delta t}=0.387$$

习题

1. 在模型参数估计的例子中，μ 和 σ 是以年为时间单位表示的. 仍然采用介绍的三步方法，请计算每个月、每个星期、每天相应的 μ 和 σ. 在答案中，你能发现什么规律?

2. 在 Excel 的表单中，列出对应于公式(5-3)的 30 个随机变量 Z 的值. 求得 30 个值的均值、方差，并打印该表格.

提示：要在从 A2 到 A31 的单元格中列出数值，需下拉工具菜单，选择"数据分析". 拉动滚动条，在对话框中选中"随机数生成"，再在弹出的概率密度分布对话框中选择"正态分布"，在输出选项中，单击"范围"，输入 **A2 : A31**. 在空白表格中就会出现一列随机数.

3. 在 Excel 的表单中，列出对应于公式(5-6)的 30 个随机变量 W_k，并绘制一个 XY 轴的散点图，打印表单.

提示：要在从 B2 到 B31 的单元格中列出数值，可以使用习题 2 中的 A 列. 在 B3 中键入公式"=**A3+B2**"，选中 B3 及其以下的单元格，在"编辑"下拉菜单中选中"填充". 较大的数会出现在 B 栏下方，因为 B 栏的每一格都是其上面一格与对应 A 栏一格相加而得. 最后，在 B2 中输入"=**A2**". B 栏第 1 个值为 W_1 开头. 选中 B2 到 B33，单击"插入"菜单中的"图表".

4. 采用 Excel 的表单，列出对应于公式(5-6)的 30 个对数正态模型的值，令 $\mu=0.2$，$c=0.1$，$\Delta t=1$，绘制一个 XY 轴的散点图，打印表单.

提示：要在从 D2 到 D31 的单元格中列出数值，可以使用习题 3 中 B 栏的 W_k 值. 在 C2 中，输入乘数 $\mu-c^2/2$. 在 C3 中，输入公式"=**C2+$C$2**". C3 的值将是 C2 值的两倍大. 选中 C2 到 C33，单击"向下填充". 你可以看到第一个输入值的倍数. 在 D2 中求对数可以通过输入公式"=**EXP(. 1 * B2+C2)**"，再选择"向下填充"完成剩余的单元格.

5.4 Black-Scholes 公式

GBM 股价模型(5-8)导出了欧式看涨期权定价公式. 这是由 F. Black 和 M.

Scholes发现的，并以他们的名字命名. 在本节中，我们给出这一公式，但是有关其推导过程下一节再讨论. 假设有一股票现价为 S_0，V 是看涨期权的价格，

X = 执行价

τ = 到期时间

σ = 股价波动率(常数)

μ = 股价漂移率(常数)

r = 无风险利率(常数) 90

由 Black-Scholes 公式，看涨期权的价格 V 值可表示为：

$$V = S_0 N(d_1) - Xe^{-r\tau}N(d_2) \tag{5-10}$$

在这个公式中，$N(x)$表示标准正态分布函数，即：

$$N(x) = P[Z \leqslant x]$$

正态分布的函数值由下面两个值给出：

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/X) + (r + \sigma^2/2)\tau}{\sqrt{\tau}\sigma}$$

及

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{\tau}$$

注意，漂移率 μ 没有在公式中出现. 乍一看，很令人惊奇. 让我们先看一道应用具体数值的例子来理解这一现象，并对公式有个更深入的认识.

例 Intel 股价在 1998 年 5 月 22 日时的有关数据如下：

$S_0 = 74.625$

$X = 100$

$\tau = 1.646$ 年(到期日 2000 年 1 月)

$r = 0.05$

$\sigma = 0.375$

则：

$$d_1 = -0.207, d_2 = -0.688, N(d_1) = 0.4164, N(d_2) = 0.2451$$

最终：

$$V = S_0 N(d_1) - e^{-r\tau} XN(d_2) = 8.37$$

实际上，媒体当时正在报道 Intel 即将面临一场反托拉斯诉讼. 而这个看涨期权的市价是 8.25 美元. 应记住的是像 Intel 这样交易活跃的看涨期权(未平仓的合约数为 14 410 张)是通过竞价市场而非理论公式定价的.

如何通过 Maple 软件给期权定价

- 进入 Maple
- 在提示符">"后键入"**with(finance):**"，回车
- 输入"**evalf(blackscholes(**S，X，r，τ，σ**));**"，回车 91

这里

$$S = \text{股票价格}$$
$$X = \text{执行价}$$
$$r = \text{无风险利率}$$
$$\tau = \text{以年为单位的到期时间}$$
$$\sigma = \text{股价波动率}$$

Maple 会显示看涨期权的价格 V.

注意：有效期较长的看涨期权称作 LEAPS. 在《华尔街日报》和《巴伦周刊》(Barron's)长期期权中都有此类期权的报价.

习题

1. 根据下列数据，计算相关的欧式看涨期权的价格.

	S_0	X	r	T	σ
(a)	80	70	0.05	3个月	0.30
(b)	60	66	0.06	2个月	0.40
(c)	50	60	0.04	1年	0.25
(d)	100	100	0.055	4个月	0.50
(e)	120	130	0.059	6个月	0.22
(f)	40	40	0.048	2年	0.60
(g)	12	10	0.045	4个月	0.33
(h)	25	25	0.05	3个月	0.28

2. 用习题1的数据，计算(a)到(h)相应的欧式看跌期权的价格.

5.5 Black-Scholes 公式的推导

在这一节，我们要介绍 Black-Scholes 公式的推导过程. 读者将很高兴地发现，这部分内容相当简单，只需要几个定义、一点代数知识和变量的代换. 大多数的中间公式都表达的是同一个意思.

5.5.1 修正的模型

这一段的内容可以这样概括："让市价等于模型定价". 具体地说，我们将通过这句话的思路，导出一个新模型(5-16). 现在详细推导.

首先，建立一个股票模型，并根据其涨跌概率采用第2章和3.3.3节介绍的

92 连锁模型进行分析. 先复习一下2.3.2节中的步骤并寻找求概率的方法.

我们构造一个只包括股票和现金的简单组合. 假设买了 a 股价格为 S_0 的股票，现金为 b 美元. 则投资额为：

$$\Pi = aS_0 + b \tag{5-11}$$

经过时间 τ 后，投资的资金将变为

$$\Pi_\tau = aS_\tau + be^{r\tau}$$

用无风险利率 r 贴现该值，得到：

$$e^{-r\tau}\Pi_\tau = ae^{-r\tau}S_\tau + b$$

与公式(5-11)联立并消去 b，得：

$$e^{-r\tau}\Pi_\tau = ae^{-r\tau}S_\tau + \Pi_0 - aS_0$$

将上式中带有 Π 项的合并在左边，带 S 项的合并在右边，我们可以得到 Π 和 S 间存在一个奇特的关系：

$$e^{-r\tau}\Pi_\tau - \Pi_0 = a(e^{-r\tau}S_\tau - S_0) \tag{5-12}$$

该等式显示，若使得 S 满足关系式

$$E[e^{-r\tau}S_\tau - S_0] = 0 \tag{5-13}$$

Π_τ 也会具有与 S 一样的性质．如果我们让公式(5-13)作为前提条件，则无论 a 值为多少，都有：

$$E[e^{-r\tau}\Pi_\tau - \Pi_0] = 0$$

因子 a 被消去了，所以 a 的值是多少并不影响结果．结果是什么呢？因为 $E[\Pi_0]=\Pi_0$，故我们能够用投资组合未来价值的折现值计算 Π_0，也就是：

$$\Pi_0 = e^{-r\tau}E[\Pi_\tau] \tag{5-14}$$

事实上，即使 a 值不断变化，上式总是成立，对任何用来复制衍生资产的资产组合上式也成立(见 2.3 节)．因此对期权这样一大类资产也成立．

总结

- 采用模型 $\tilde{S}_\tau$ 替代原有的真正股价模型 S_τ，方差保持不变，$\tilde{S}_\tau$ 模型满足如下关系：

$$\tilde{S}_0 = e^{-r\tau}E[\tilde{S}_\tau]$$

- 对任何用来复制的投资组合 Π_τ，可以计算下面的值

$$e^{-r\tau}E[\Pi_\tau]$$

- 上式的值就是 Π_0． 93

是否有公式表达 $\tilde{S}_\tau$？确实，这个公式与公式(5-8)相近，其表示形式为：

$$S_0e^{\sigma B_\tau + m\tau} \tag{5-15}$$

根据前面在总结中的结论，修正后的股价模型也满足：

$$S_0 = e^{-r\tau}E[S_0e^{\sigma B_\tau + m\tau}]$$

化简后，得到：

$$E[e^{\sigma B_\tau + (m-r)\tau}] = 1$$

将上式与公式(5-5)相比较，可以看出 $m=r-\sigma^2/2$．

因此，修正的股价模型就是：

$$\tilde{S}_\tau = S_0 e^{\sigma B_\tau + (r-\sigma^2/2)\tau} \tag{5-16}$$

巧合的是，修正的股价模型看上去与 GBM 模型非常接近．但它与股价模型是完全不同的模型，在该模型中股价的增长率被人为地设低了．显然该模型用于预测股票未来价格是不合适的，但对于计算现值却是很理想的模型．

5.5.2 期望值

对欧式看涨期权，最终的报酬是$(S_T-X)^+$，因此公式(5-14)变为：

$$V = e^{-rT}E[(S_T - X)^+]$$

这里我们采用公式(5-16)给出的股价模型：

$$S_T = S_0\exp[\sigma B_T + (r-\sigma^2/2)T]$$

现在对表达式进行整理．注意到 B_T 是均值为 0、方差为 T 的正态随机变量．我们可以用$\sqrt{T}Z$ 代替 B_T，其中 Z 是标准正态变量(均值是 0、方差是 1)，则：

$$S_T = S_0\exp[\sigma\sqrt{T}Z + (r-\sigma^2/2)T]$$

因此：

$$V = e^{-rT}E[(S_0\exp[\sigma\sqrt{T}Z + (r-\sigma^2/2)T] - X)^+],$$

从而：

$$V = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[(S_0\exp[\sigma\sqrt{T}x + (r-\sigma^2/2)T] - X)\right]^+ e^{-x^2/2}dx \tag{5-17}$$

通过积分的一些基本规则，我们将计算期望值．

5.5.3 两个积分

现在开始计算公式(5-17)的值．计算过程并没有看上去的那么难．事实上，
94 我们不需要做任何积分．首先计算(5-17)括号中的表达式．当

$$S_0\exp\left[\sigma\sqrt{T}x + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right] - X > 0$$

成立时，括号中的表达式非零．那么，通过解 $S_0\exp[\sigma\sqrt{T}a + (r-\sigma^2/2)T] - X = 0$，可得 a 值为：

$$a = \frac{\ln\left(\frac{X}{S_0}\right) - \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

这个结果是令人鼓舞的，因为它与我们前面已经给出的 Black-Scholes 公式类似．得到期权价格为：

$$V = \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{\infty}\left[S_0\exp\left[\sigma\sqrt{T}x + \left(r-\frac{\sigma^2}{2}\right)T\right] - X\right]e^{-x^2/2}dx$$

我们把积分分成两部分：

第二项

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{\infty} - Xe^{-x^2/2}dx = -X(1-N(a))$$

$$= -XN(-a)$$

这一步很容易.

第一项

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{\infty} S_0 \exp\left[\sigma\sqrt{T}x + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T\right]\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}S_0\mathrm{e}^{(r-\sigma^2/2)T}\int_a^{\infty}\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}x}\,\mathrm{e}^{-x^2/2}\mathrm{d}x$$

为了得到最终的积分，我们采用用一个最古老的数学方法：凑平方.

$$x^2/2 - \sigma\sqrt{T}x = x^2/2 - \sigma\sqrt{T} + \sigma^2 T/2 - \sigma^2 T/2$$

$$= (x - \sigma\sqrt{T})^2/2 - \sigma^2 T/2$$

则：

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{\infty}\mathrm{e}^{\sigma\sqrt{T}x - x^2/2}\mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_a^{\infty}\exp\left[-\frac{(x-\sigma\sqrt{T})^2}{2} + \frac{\sigma^2 T}{2}\right]\mathrm{d}x$$ 95

下面进行变量代换，令 $y = x - \sigma\sqrt{T}$，积分变为：

$$\mathrm{e}^{\sigma^2 T/2}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{a-\sigma\sqrt{T}}^{\infty}\mathrm{e}^{-y^2/2}\mathrm{d}y$$

$$= \mathrm{e}^{\sigma^2 T/2}(1 - N(a - \sigma\sqrt{T}))$$

将公式(5-17)第一项中的 $\mathrm{e}^{\sigma^2 T}$ 约简，经过进一步变化，得：

$$S_0\mathrm{e}^{rT}N(-(a - \sigma\sqrt{T}))$$

5.5.4 推导总结

将第一项和第二项的结果代入，得：

$$\begin{aligned} V &= \mathrm{e}^{-rT}E[(S_T - X)^+] \\ &= \mathrm{e}^{-rT}[S_0\mathrm{e}^{rT}N(-(a-\sigma\sqrt{T})) - XN(-a)] \\ &= S_0 N(-(a-\sigma\sqrt{T})) - X\mathrm{e}^{-rT}N(-a) \end{aligned}$$

由于：

$$a = \frac{\ln\left(\frac{X}{S_0}\right) - \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

即：

$$-a = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{x}\right) + \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

同时：

$$-(a - \sigma\sqrt{T}) = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{X}\right) + \left(r + \frac{\sigma^2}{2}\right)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

则，$-a=d_2$，$a-\sigma\sqrt{T}=d_1$，从而：

$$V = S_0 N(d_1) - e^{-rT} X N(d_2)$$

仔细回顾一下以上过程，就会发现没有用到任何高深的数学技巧. 第 5.8 节将会解释为什么第 3 章中介绍的二叉树定价模型可以给出由 Black-Scholes 公式
96 计算所得值的近似值，即二叉树模型可以模拟几何布朗运动.

5.6 看涨期权与看跌期权平价

欧式看涨期权的价格与欧式看跌期权的价格有关. 假设我们决定卖空一份带抛补的看涨期权. 也就是说，以 S 的价格买入一股股票，同时由于担心股价下跌，以 C 的价格卖出一份看涨期权(到期时间和执行价任意). 注意股价有可能下跌，所以又买了一份价格为 P、到期时间和执行价与看涨期权相同的看跌期权. 那么：

$$今天头寸的成本 = S + P - C$$

设看涨看跌期权的执行价都是 X，那么到期时候的收益是多少呢?

- 如果 $S \geqslant X$，则到期收益为 X. 看跌期权价值为 0，我们以 X 的价格将股票卖给看涨期权的购买者.
- 如果 $S < X$，则到期收益为 X. 看涨期权价值为 0，我们以 X 的价格将股票卖给看跌期权的出售者.

是不是有些神奇? 无论未来发生什么情形，到期收益总是相同，即为现金 X. 由于未来的收益是确定的，因此有：

$$(S + P - C)e^{r\tau} = X$$

即：

$$C - P = S - e^{-r\tau} X$$

注意，如果价差 $C-P$ 不等于 $S-e^{-r\tau}X$，则通过买卖 $S+P-C$ 存在套利机会，并迅速导致等式两边相等.

对于具有与欧式看涨期权定价相同参数的欧式看跌期权定价，我们可以采用平价公式进行定价.

平价公式可以写成：

$$P = C - S + e^{-r\tau} X$$

将欧式看涨期权定价的 Black-Scholes 公式代入，得：

$$P = SN(d_1) - e^{-r\tau} XN(d_2) - S + e^{-r\tau} X$$

应用下面熟悉的等式：对于 $i=1$，2，有 $N(d_i)+N(-d_i)=1$，得到：

$$P = -SN(-d_1) + e^{-r\tau} XN(-d_2),$$

这就是欧式看跌期权的 Black-Sholes 价格.

习题

以下的习题用到的股价随机模型如下：

$$S_T = S_0 e^{(r-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}Z}$$

该模型也可以用修正模型(5-16)来替代. 97

1. 假设 Z 表示标准正态随机变量.

(a)证明对任何 $T>0$, $E[e^{\sigma\sqrt{T}Z}]=e^{\sigma^2 T/2}$.

提示：以 $e^{\sigma\sqrt{T}x}$ 乘以积分(5.3)表示的密度函数，从 $-\infty$ 到 $+\infty$ 积分，再配方.

(b)证明 $E(S_T)=e^{rT}S_0$. 此式表明，修正的股价模型下股票的平均收益率就是连续时间无风险复利.

2. 证明，$P(S_T>X)=N(d_2)$，d_2 就是 Black-Sholes 公式的参数.

提示：仔细阅读 Black-Scholes 公式的证明过程.

3. 在第 1 章，我们知道：

$$F_T = e^{rT}S_0$$

是 T 时刻交割的股票远期合约的价格. 证明，Black-Scholes 的两个参数 d_1 和 d_2 可以表示为：

$$\frac{\ln(F_T/X)}{\sigma\sqrt{\tau}} \pm \sigma\sqrt{\tau}/2$$

4. 这道题计算量稍大一些. 分析指数看涨期权的定价. 该期权它有一个额外的参数，$\alpha>0$. 如果期权在时刻 T 执行，则期权持有人可得到 S_T^α. 利用 5.5 节的步骤证明这此类期权的定价公式如下：

$$\exp[(\alpha-1)(r+\sigma^2/2)T+\alpha^2\sigma^2 T/2]S_0^\alpha N(\tilde{d}_1) - e^{-rT}XN(\tilde{d}_2)$$

其中：$\tilde{d}_i=\ln(e^{rT}S_0/X^{1/\alpha})/\sigma\sqrt{T}\pm\alpha\sigma\sqrt{T}/2$.

提示：模仿 Black-Scholes 公式的证明过程. 根据 5.5 节的过程，指数期权的价格为

$$e^{-rT}E[(S_T^\alpha - X)^+]$$

类似 Black-Scholes 公式的证明，求解此积分. 注意应用如下公式：

$$S_T^\alpha = S_0^\alpha \exp[\alpha(r-\sigma^2/2)T+\alpha\sigma\sqrt{T}Z]$$

5.7 二叉树模型和连续时间模型

在第 3 章，我们使用了一系列的连锁等式(3-3)求解期权价格. 虽然只是在二叉树模型中我们使用了此法，但我们会发现，Black-Scholes 公式与此是一致的.

5.7.1 二项式分布

连锁过程包含哪些步骤呢？我们采用该方法对期权二叉树的每个节点进行定价，从到期最后一天往前算，一直找到初始价格. 第 3 章的公式(3-3)有两个组成部分：第 1 个是贴现因子 $e^{-r\Delta t}$，它并非连锁模型的主要特点. 我们多次采用贴现因子进行贴现，相当于在公式(3-3)中不包含指数项的因子上一次性地乘上

98 贴现因子 e^{-rT}.

公式(3-3)中不包含指数项的因子才是连锁模型的重要部分. 它只是一个简单的期望值，该值取决于到期日时的节点的随机结果. 在二叉树模型中，我们通过股价变化路径来决定到期日时节点的价格. 一个简单的随机变量

$$X = \text{上涨的次数}$$

决定了到期日时节点的位置. 下面两种方法在计算上是等价的：

- 用连锁模型计算 n 期二叉树的期望.
- 设 X 是一个服从二项分布的随机变量，代表 n 次试验中成功的次数. 成功的概率就是公式(3-2)给出的无套利概率 q.

在第二个方法中可以采用熟悉的二项式概率公式来计算 X：

$$\Pr\{X = k\} = \frac{n!}{k!(n-k)!}q^k(1-q)^{n-k} \tag{5-18}$$

例　二项分布的期望值　一个三期的二叉树，股价的参数为 $S_0=20$，$u=1.1$，$d=0.9$，$q=0.8$. 如果期权在到期日的收益为：

$$(S_3 - 21)^+$$

求其期望值.

S_3 的可能值为 26.62、21.78、17.82、14.58，分别对应于 X 取值 3、2、1、0. 将这些值代入公式(5-18)求得概率为 0.512、0.374、0.096、0.008. 到期时期权的收益分别为 5.62、0.78、0、0，因此期望收益是

$$5.62(0.512)+0.78(0.374)+0=3.17(\text{美元})$$

若期数 n 非常大的话，用该例介绍的方法就会显得非常繁琐. 幸运的是，在这种情况下，我们可以用正态分布的概率代替二项式分布的概率. 这个被广泛使用的近似算法即

棣莫弗中心极限定理

定义　中心极限定理是指，为了计算 $\Pr\{X\leqslant k\}$的值，可以以随机变量

$$\sqrt{nq(1-q)}Z + nq \tag{5-19}$$

来代替 X. 其中，Z 是标准正态分布的随机变量.

要理解为什么正态分布可以代替二项式分布并不容易. 但我们可以对系数项

99 $\sqrt{nq(1-q)}$和 nq 进行一些分析. 注意到这里 Z 的均值为 0，标准差为 1.

- 将常量 nq 加到 Z 中去，使之均值变为 nq. 这正是 X 的均值.
- $\sqrt{nq(1-q)}$与 Z 相乘，其标准差正好与 X 的标准差相同.

例　正态分布的概率　假设某一股票价格涨跌以二项式分布概率来表示. 在 15 天内每天观察 6 次股价变化. 设上涨一次的概率为 $p=0.65$，涨跌都是彼此独立的. 那么在观察期

内，至少上涨了 52 次的概率为多少呢？

由于 $np=90(0.65)=58.5$，$\sqrt{npq}=\sqrt{90\times 0.65\times 0.35}=4.52$. 由中心极限定理计算得 X 的近似值为

$X\approx 4.52Z+58.5$

为了计算

$\Pr(X\geqslant 52)\approx\Pr(4.52Z+58.5\geqslant 52)$

将不等式右边变为 $\Pr(Z\geqslant -1.55)$，查正态分布表得答案是 0.94.

这个例子是一个有 90 期的二项式，但是我们用了一个简单的正态分布量概括了所有上涨的情况. 由此可见，这种近似方法对于计算复杂的多期的股票和期权二叉树是非常有效的.

下面我们将考虑连续时间股价模型. 该股票价格的漂移量是 μ，波动率是 σ. 我们希望能构造一个二叉树，每一期的时间段都是 Δt.

5.7.2 多期二叉树的近似

二叉树的节点上采用如下方法记录了股价从 S 开始的涨跌次数：

若股价上涨，则股价为 $Se^{\mu\Delta t+\sigma\sqrt{\Delta t}}$

若下期下跌，则股价为 $Se^{\mu\Delta t-\sigma\sqrt{\Delta t}}$

对一固定的时刻 t，我们以 n 计算现在直到 t 时刻的期数，$n=t/\Delta t$. 在 t 时刻的节点的股价只与在 n 期内

X_n：上涨的次数

有关. 要理解这一点，首先就要明白因子

$$e^{\mu\Delta t\pm\sigma\sqrt{\Delta t}}$$

的作用是将本期节点时的股价值转换为下一期节点的值. 通过对正负号项的合并，我们可以得到：

$$\begin{aligned}S_t &= S_0\exp[X_n\mu\Delta t+X_n\sigma\sqrt{\Delta t}]\\ &\quad\times\exp[(n-X_n)\mu\Delta t-(n-X_n)\sigma\sqrt{\Delta t}]\end{aligned}$$ 100

上式中 $n-X_n$ 从何而来呢？它们表示股价下跌的次数. 注意到指数项可以消去，得到：

$$\ln S_t=\ln S_0+n\mu\Delta t+(2X_n-n)\sigma\sqrt{\Delta t} \tag{5-20}$$

迄今为止，我们还没有提到任何二项式分布的概率. 第 2 章中最有用的公式(2-5)，即无套利概率为：

$$q=\frac{Se^{r\Delta t}-S_d}{S_u-S_d}$$

我们可以将上涨下跌概率值代入模型. 虽然 q 的表达式看上去复杂，但是 q 实际上接近$\frac{1}{2}$，因为股价的运动是对称的. 我们对 $S_u\approx S_d$ 的情形很感兴趣，因

为 Δt 非常小，如果我们把 q 的表达式关于$\sqrt{\Delta t}$进行展开，可以得到：

$$q \approx \frac{1}{2} - \sqrt{\Delta t}\frac{\mu + 1/2\sigma^2 - r}{2\sigma} \tag{5-21}$$

该式对于我们计算公式(5-20)中的

$$(2X_n - n)\sigma\sqrt{\Delta t}$$

项非常有帮助.

均值 均值为$(2nq-n)\sigma\sqrt{\Delta t}$，但由于 $n=t/\Delta t$，所以 $\ln S_t$ 的均值变为

$$(2q-1)\sigma t/\sqrt{\Delta t}$$

$2q-1$ 的近似项中包含$\sqrt{\Delta t}$项，该项可以约去，因此 $\ln S_t$ 的均值变为：

$$(-\mu - 1/2\sigma^2 + r)t$$

注意，$\sqrt{\Delta t}$被消去后，$\ln S_t$ 均值的近似值只与总的时间有关. 现在让我们回到公式(5-20)对 $\ln S_t$ 的分析. $\ln S_t$ 的表达式中有“$+\mu t$”项，因此 $\ln S_t$ 的均值为：

$$-\frac{1}{2}\sigma^2 t + rt = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t$$

上面的表达式看上去应很熟悉，它表示：

1. $\ln S_t$(或其均值)是线性增长的，如同债券和货币市场基金一样.

2. 它的斜率为 $r-\sigma^2/2$，正是公式(5-16)指数项中的漂移率. $r-\sigma^2/2$ 出现，是因为我们使用了风险中性概率 q.

标准差 $\ln S_t$ 的标准差是 $SD(2X_n)\sigma\sqrt{\Delta t}$. 化简后得到：

101

$$SD(2X_n) = 2\sqrt{nq(1-q)} \approx \sqrt{n} = \sqrt{t/\Delta t}$$

因为 $q\approx 1/2$，所以 $2\sqrt{q(1-q)}$项被忽略. $\ln S_t$ 的标准差是

$$\sigma\sqrt{t}$$

总结 在多期二叉树中，已知 S_u、S_d 和 q，随机变量 $\ln S_t$ 近似服从正态分布. 为了计算方便，我们可以令

$$\ln S_t = \sigma\sqrt{t}Z - \frac{1}{2}\sigma^2 t + rt = \left(r - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma\sqrt{t}Z$$

仔细观察公式(5-16)中的几何布朗运动模型，你会发现上式得到的近似模型与几何布朗运动模型有相同的参数值.

两种方法的一致性确实不错，但是为什么除了几何布朗运动以外我们还需要二叉树的算法呢？因为用几何布朗运动算期望常常非常困难，而多期二叉树提供了另一种方案.

比如，如果某些期权设有障碍，超过这个障碍时期权的价值为零，则对它求期望值时应该忽略那些超过障碍的情况. 直接用几何布朗运动来计算这种期权很困难，但是只要 Δt 足够小，多期二叉树和连锁过程就可以帮我们获得合理精确的期望值. 通常情况下，我们在选择 $n=t/\Delta t$ 时，建议取 n 在 50 与 100 之间.

5.7.3 符合几何布朗运动的二叉树构造

在第 3 章和第 4 章中，通过选择因子 u 和 d，生成二叉树节点值，并最终得到多期的股价二叉树. 由公式(5-20)可得：

$$u = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} \text{ 及 } d = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} \tag{5-22}$$

在这个参数设置基础上，对应的二叉树分支的概率是：

$$q = \frac{1}{2} - \sqrt{\Delta t}\left(\frac{\sigma}{4} - \frac{r}{2\sigma}\right) \tag{5-23}$$

注意，每一个节点的值和概率都仅与参数 σ、利率 r 和时间区间 Δt 有关. Δt 越小，连锁模型的结果越精确. 采用这些近似方法得到的结果与用几何布朗运动算出的股票衍生产品的价格是一样的.

例 多期二叉树的参数设置 设某一股票的年波动率是 $\sigma=0.38$. 一些股票期权将在两个月内到期，因此我们需要一个二叉树来表示这段时间内的股价变动. 为了构造一个 40 期的二叉树，我们先利用公式(5-22)和(5-23)计算 u、d 和 q. 设年利率是 5.5%.

先计算 Δt. 因为 $t=2/12$，

$$\Delta t = t/40 = 0.00416$$ 102

接着，$\sqrt{\Delta t}=0.0645$. 由公式(5-22)计算出 $\sigma\sqrt{\Delta t}=0.0245$. 因此：

$$u = e^{0.00245} = 1.0248 \text{ 及 } d = 0.9758$$

为了计算 q 值，要用到 $\sqrt{\Delta t}$、σ 及 $r=0.055$，计算公式如下：

$$q = 0.5 - 0.0645 \times \left(\frac{0.38}{4} - \frac{0.055}{2\times 0.38}\right) = 0.4985$$

有了以上的这些参数，就可以保证这 40 期的二叉树的每个节点的值和各分枝的概率是精确的，并可以构造出一个如第 3 章和第 4 章介绍的二叉树，然后计算该股票期权的价格.

习题

1. 假设某股票价格变动符合二项式分布概率. 在 30 天内，每天观察两次. 上涨的概率 $p=0.75$. 利用正态分布，近似计算观察期中至少上涨 40 次的概率.

2. 假设某股票符合二项式分布概率. 每一个股价变动的幅度都是 $e^{\pm 0.02}$. 上涨一次的概率是 $p=0.6$，观察 100 次股价变动. 利用正态分布，近似计算在观察期内股价至少上涨 80% 的概率.

3. 已知 $r=0.06$，$\sigma=0.3$，$\Delta t=0.003$，计算几何布朗运动到多期二叉树的调整因子 u 和 q 值.

4. 已知 $r=0.05$，$\sigma=0.4$，$\Delta t=0.003$，计算几何布朗运动到多期二叉树的调整因子 u 和 q 值.

5. 假设某股票期权将在 $t=0.25$ 年后到期. 股票的 $\sigma=0.5$，$r=0.055$，计算

多期二叉树的 u 和 q 值.

6. 利用第 3 题的数据和第 2 章的公式(2-5)计算 q 值. 在本题中，公式(5-23)的精度如何?

5.8 几何布朗运动股价模型应用的注意事项

从 Black-Scholes 公式衍生而来的看涨期权定价公式的基础是萨缪尔森的股票价格模型：

$$dS = \mu S dt + \sigma S dB$$

这个模型看上去很合理，我们毫无保留地使用了这个公式. 然而，当我们选择一个模型的时候，它的结果可能出现我们未曾预见的与现实世界不符的情况.

我们来看看执行某欧式看涨期权是否会带来收益. 设我们购买了某股价为 S 的股票的看涨期权，执行价为 X，到期时间为 T. 理所当然，有人会问，如果到
103 期时执行该期权，能否得到收益呢? 要回答这一问题并不难. 实际上：

$$\begin{aligned}
&\Pr[\text{期权价值处于实值状态}] \\
&= \Pr[S_T \geqslant X] \\
&= \Pr[S_0 e^{(\mu-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}Z} \geqslant X] \\
&= \Pr[(\mu-\sigma^2/2)T+\sigma\sqrt{T}Z \geqslant \ln(X/S_0)] \\
&= \Pr\left[Z \geqslant \frac{\ln(X/S_0)-(\mu-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}\right]
\end{aligned}$$

我们令

$$d = \frac{\ln(S_0/X)+(\mu-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

则

$$\Pr[S_T \geqslant X] = \Pr[Z \geqslant -d] = N(d) \tag{5-24}$$

这就是要回答的问题的答案. 但为了更清楚地回答上面问题，让我们先看两个例子.

例 平值期权

$$S_0 = X = 60, \quad T = 1\text{ 年}$$
$$\mu = 0.11, \quad \sigma = 0.47$$

这些数据与许多著名股票的实际数据一致. 年回报率是 11%，这个数字由 20 世纪的历史数据得来. 波动率是 47%，从历史上的标准看来，这个数字很高. 但是在 1999 年，许多股票的波动都达到了这个值. 注意：

$$d = 0$$

因此 Pr[期权价值处于实值状态]=0.5. 0.5 的概率看上去不是太不合情理. 但同时由于股票有向上的漂移，所以我们本来预期到期执行盈利的概率会大于 0.5.

让我们再来考虑一种更为有趣的情况.

例　我们还是以平价期权为例.

$$S_0 = X = 60,\quad T = 1 \text{ 年}$$

$$\mu = 0.2,\quad \sigma = 1.00$$

波动率很高，但这样的波动率在市场上并非没有. 计算得到：

$$d = -0.3$$

则：

$$\Pr[\text{期权价值处于实值状态}] = N(-0.3) = 1 - 0.618 = 0.38.$$

这个结果当然与直觉不符. 这是个年回报率 20% 的股票，一个涨势强劲的股票，怎么可能其期权最终价值为零的概率是最终价值为正的概率的近两倍？我们预期 $\Pr[S_t \geqslant X]$ 至少是 0.5.

计算是正确的，问题出在我们最初使用的模型上：

$$\mathrm{d}S = \mu S \mathrm{d}t + \sigma S \mathrm{d}B,$$

并由此导出

$$S_t = S_0 \exp\left[\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma B_t\right]$$

随机变量

$$\exp\left[\sigma B_t - \frac{\sigma^2 t}{2}\right]$$

的概率分布当 σ 很大时是极不均衡的. 图 5-6 是其密度函数的图形. 正是这种不均衡的分布导致了与直觉不一致的结论.

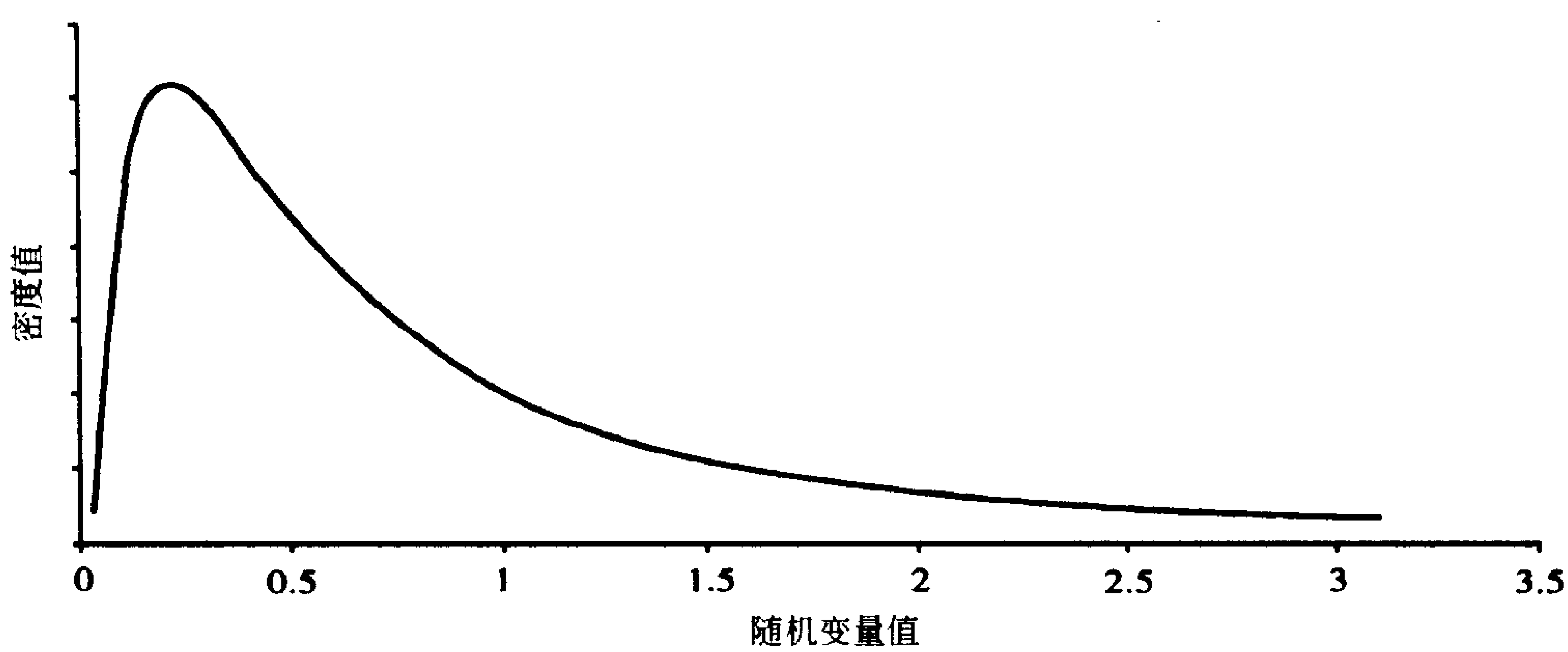


图 5-6　$\mu=0$ 时几何布朗运动的密度分布

Black-Scholes 公式非常有用，不能仅仅因为它的结论与直觉不符合而放弃使用. 同时，读者应该意识到，简单的模型都是有其缺陷的. 也许一个更好的模型

104~105 不久后会诞生.

5.9 附录：布朗运动路径的构造⊖

一枚硬币，投掷一次正面反面出现的概率都是 0.5，现投掷 100 次，把结果按顺序列在表上. 这个表上的数据有各种可能性. 我们将要解释如何在区间 [0，1]上构造布朗运动的路径 $W=W(t)$.

令 Z 代表一个标准正态分布的随机值. 将区间分为 100 个相同的小区间. 设：

$$t_j = j/100$$

其中 $j=0, \cdots, 100$. 再设

$$W(t_k) = \sum_{j=1}^{k} Z(j)$$

其中，$Z(j)$是随机的点. 令 $W(0)=0$. 为了得到布朗运动的路径，将这些点$(t_k, W(t_k))$用直线段连接起来. 但这些线段太曲折了，下面的方法可以使它变得平滑一些，令

$$W(t_k) = \sum_{j=1}^{k} Z(j)\, \frac{1}{100}$$

注意，$\frac{1}{100}=\Delta t$. 但是这样的话，所得的路径几乎不偏离 $W(0)$. 正确的方法是令：

$$W(t_k) = \sum_{j=1}^{k} Z(j)\, \frac{1}{10}$$

注意这里：$\frac{1}{10}=\sqrt{\Delta t}$. 形式变换后，得：

$$\Delta = Z \cdot \sqrt{\Delta t}$$

这样我们将得到一条曲线，但还不是最后一步. 这条曲线上有许多由点连接起的直线段. 为了得到真正意义上的布朗运动路径，我们必须令 $\Delta t \to 0$. 要仔细考虑各种因素，才能在最后得到精确的结果.

图 5-7 到 5-9 是布朗运动的中间结果. 图 5-8 比图 5-7 包含了更多随机值 Z，但这不是通过在 32 期中简单模拟 Z 值得到的. 为了产生一条 $\Delta t \to 0$ 时的路径，前一张图上的点必须都保留下来. 也就是说，为了得到极限的结果，必须不断加入中间产生的随机点.

保尔 • 列维(Paul Levy)发现了一种在布朗运动路径上不断添加新点的方法. 已知

106 $$B_t = A \text{ 及 } B_{t+\Delta t} = B$$

⊖ 本节在首次阅读本书时可跳过.

该过程取决于在路径上中间点生成的方法.

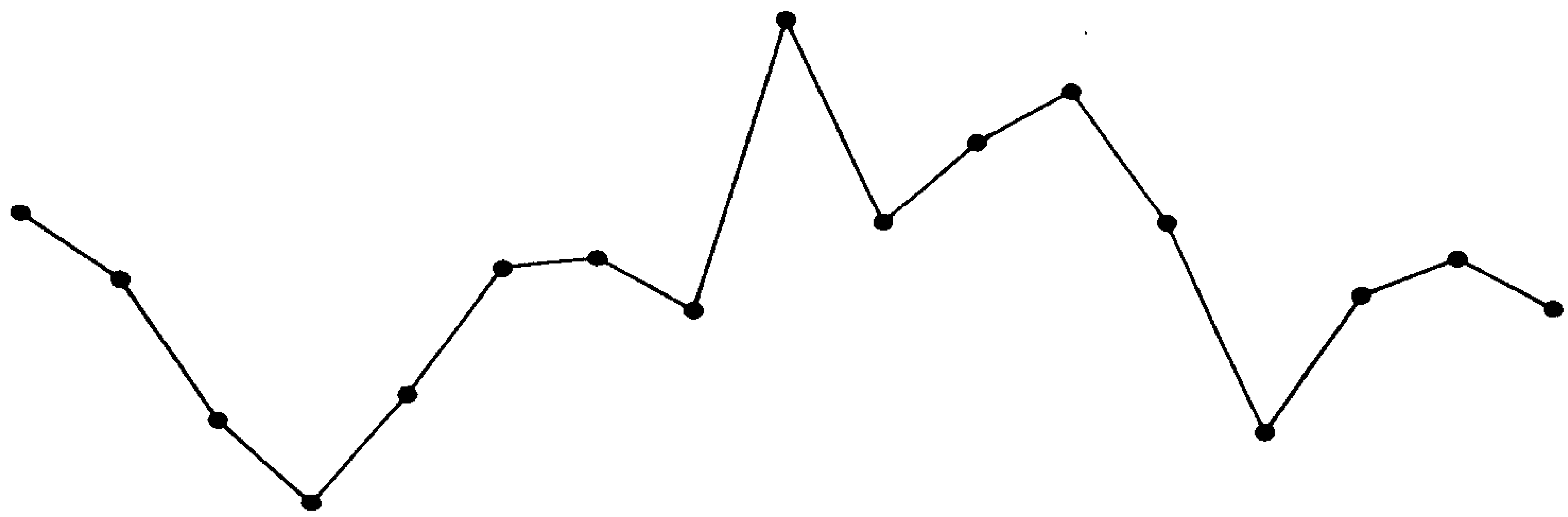


图 5-7 分为 16 个区间

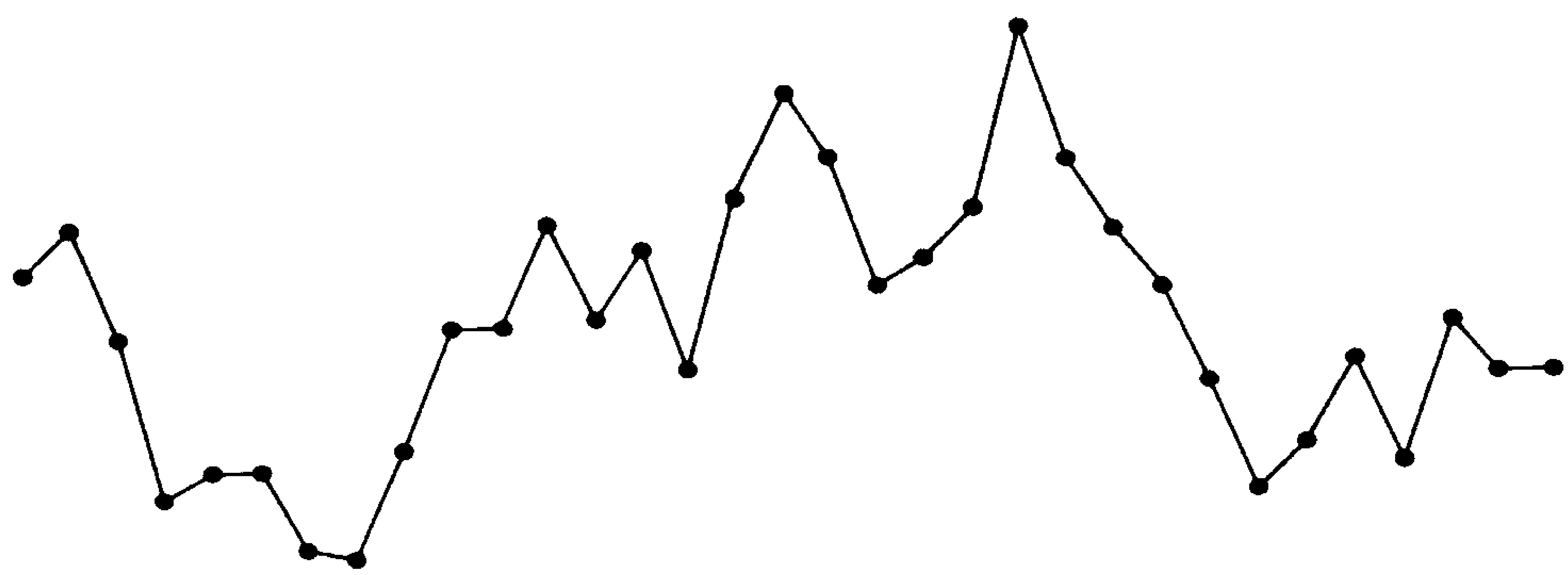


图 5-8 分为 32 个区间

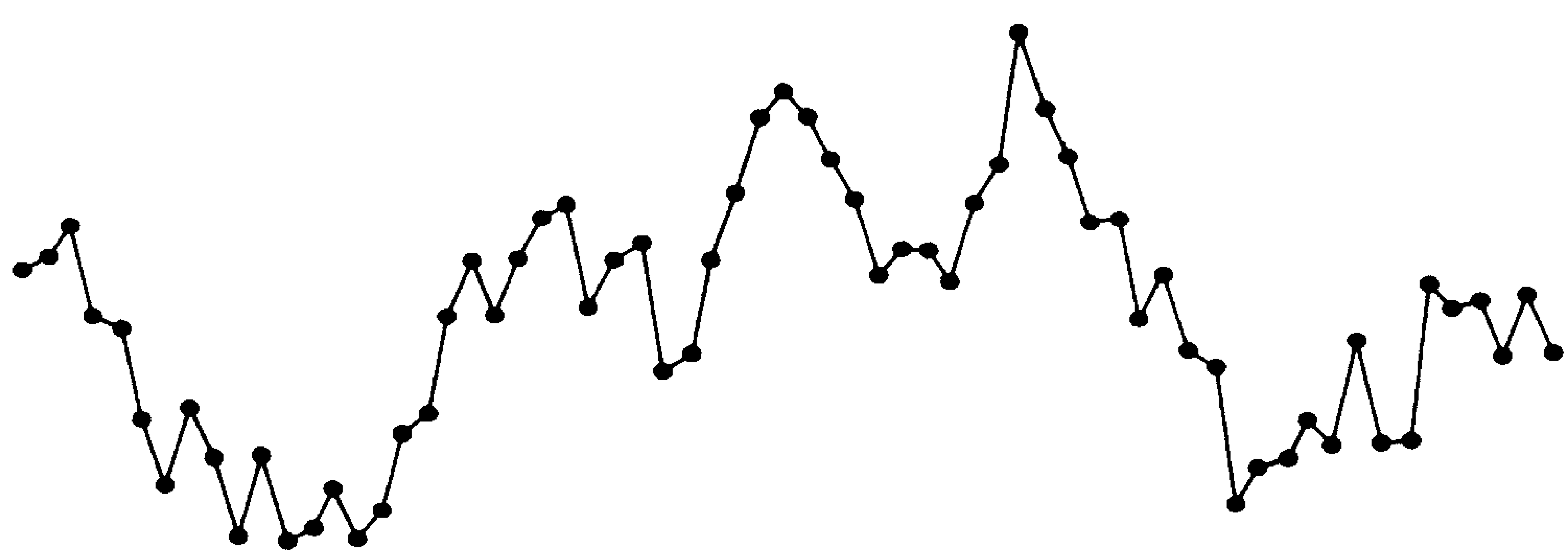


图 5-9 分为 64 个区间

在这些条件下，采用一个新的 Z 值按如下方法得到的中间点仍然是正态分布随机变量：

$$B_{t+\Delta t/2} = \frac{A+B}{2} + \frac{\sqrt{\Delta t}}{2} Z$$

例 假设 $B_2=-0.6$，$B_4=1.2$. 为了得到相应的中间点 B_3 的值，我们用随机数产生程序得到 Z 值，再令：

$$B_3 = 0.3 + \frac{\sqrt{2}}{2} Z$$

计算了 B_3 之后，只要再选择一个新的 Z' 值，就可以继续模拟 $B_{2.5}$ 的值[⊖]：

$$B_{2.5} = \frac{-0.6 + B_3}{2} + \frac{1}{2} Z'$$

这种模拟方法惟一的规则就是每个 Z' 的值必须与其前一个 Z 值相互独立. 模拟结束后，点之间的直线段就近似为布朗运动的路径. 要模拟得更精确，就加入更多的点.

布朗运动的历史 布朗运动是一个数学的概念，以英国生物学家罗伯特·布
107～108 朗(1773—1858)命名. 布朗做了一个实验研究为什么通过显微镜观察，微小的颗粒会朝随机的方向运动. 爱因斯坦 1905 年给出了正确的解释，他的理论基础是分子间的碰撞.

⊖ 参见 Karlin and Taylor, *A First course in Stochastic Process*. New York: Academic Press, 1975.

第 6 章　Black-Scholes 模型的解析方法

数学家们就像法国人，你告诉他们一些信息，他们就会翻译成自己的语言，表达出来就完全不一样了.

——歌德

本章我们仍将采用简单的股价模型：

$$dS = uS\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}B \tag{6-1}$$

来构造期权定价的解析方法. 解析方法需要用到微分方程，微分方程在人类研究的许多领域都被用到. 艾萨克·牛顿首先认识到了微分方程的重要性和实用性，并且这样描述到：

Data aequatione quotcunque fluentes quantitates involvente fluxiones invenire et vice versa.（给定任何与时间有关的变量，可以采用微分方程描述并求解，反之亦然 ）.

三个世纪过去了，这句名言仍然适用. 这句话的意思是不管在世界什么地方，只要是随时间变化的变量（牛顿所指的 fluentes quantitates），就可以采用微分方程（牛顿所指的 fluxiones）进行描述，并根据微分方程求解出变化的数值，不管这些值到底是人口、星体内的温度，还是期权的价格. 因此微分方程是用模型描述现实世界的强有力的工具.

6.1　微分方程推导的思路

设 $V(S, t)$ 表示某股票期权的价格，S_t 是股票在 t 时刻的价格. 假设 $V(S, t)$ 是关于变量 S 和 t 的平滑的函数. 构造 Black-Scoles 微分方程的思路包括四步：前三步是纯粹是数学上的推导，关键的金融上的含义则在最后一步.

第 1 步：将函数 V 关于 S 和 t 进行泰勒级数展开；

第 2 步：在 V 的展开的泰勒级数中，替代方程中 $\mathrm{d}S$；

第 3 步：进行代数变换，包括简化布朗项和忽略高阶项；

第 4 步：令 V 与复制的资产组合相等.

这样一来我们就得到了想要的微分方程.

6.2　$V(S, t)$ 的扩展

首先回顾一下泰勒级数方法. 对于一元函数 $y=f(x)$，有如下的泰勒展开级数：

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} x^k$$

本章我们感兴趣的将是二元函数 $z=f(x,y)$，泰勒展开级数如下：

$$f(x,y)=f(0,0)+\frac{\partial f(0,0)}{\partial x}x+\frac{\partial f(0,0)}{\partial y(0,0)}y+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x^2}x^2 \\ +\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x\partial y}xy+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial y^2}y^2+\text{高阶项} \tag{6-2}$$

将公式(6-2)写成微分的形式⊖：

$$\mathrm{d}f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathrm{d}x+\frac{\partial f}{\partial y}\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\mathrm{d}x^2 \\ +\frac{\partial f}{\partial x\partial y}\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}+\text{高阶项} \tag{6-3}$$

你也可以将 $\mathrm{d}x$ 理解为 x 的小量变化，$\mathrm{d}f$ 则是由于 $\mathrm{d}x$ 和 $\mathrm{d}y$ 引起的 f 的小量变化. 方程(6-3)是一个通用的数学表达式，你可以将它应用于任何领域，包括
110 热学、光学、声学和电磁学.

我们现在将它应用于期权的价格运动过程 V：

$$\mathrm{d}V=\frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}S+\frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\mathrm{d}S)^2 \\ +\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}\mathrm{d}S\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}(\mathrm{d}t)^2+\text{高阶项}$$

这样推导的第 1 步就完成了.

6.3 $V(S,t)$的扩展与简化

接下来我们要将公式(6-1)替代上面方程中的 $\mathrm{d}S$，并且只保留 $\mathrm{d}t$ 的一阶项，则有：

$$\mathrm{d}V=\frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t+\frac{\partial V}{\partial S}(\mu S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}B)+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\mu S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}B)^2 \\ +\frac{\partial^2 V}{\partial S\partial t}(\mu S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}B)\mathrm{d}t+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial t^2}\mathrm{d}t^2$$

我们保留上式右边的前四项，忽略掉最后一项. 下面对保留的一些项进行仔细分析.

$$\mathrm{d}S\mathrm{d}t=(\mu S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}B)\mathrm{d}t=\mu S(\mathrm{d}t)^2+\sigma S\mathrm{d}B\mathrm{d}t$$

前面已经知道 $\mathrm{d}B\approx Z\sqrt{\mathrm{d}t}$，因此 $\mathrm{d}B\mathrm{d}t\approx Z(\mathrm{d}t)^{3/2}$. 又由于$(\mathrm{d}t)^2$ 和$(\mathrm{d}t)^{3/2}$都不是 $\mathrm{d}t$ 的一阶项，因此我们可以忽略 $\mathrm{d}S\mathrm{d}t$ 项. 这样我们只需关注下面的$(\mathrm{d}S)^2$ 项：

$$(\mathrm{d}S)^2=\mu^2S^2(\mathrm{d}t)^2+\mu\sigma S^2\mathrm{d}B\mathrm{d}t+\sigma^2S^2(\mathrm{d}B)^2$$

由前面的推理知我们可以忽略掉上式右边的前两项. 另一方面，$(\mathrm{d}B)^2\approx(Z\sqrt{\mathrm{d}t})^2=Z^2\mathrm{d}t$，正好是关于 $\mathrm{d}t$ 的一阶项，我们必须予以保留.

现在将 $\mathrm{d}V$ 中的各项进行整理：

⊖ 公式(6-3)右边第 5 项漏掉$(\mathrm{d}y)^2$. 译者已经与原书两位作者核实.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}V &= \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial V}{\partial S}(\mu S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}B) + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 Z^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\mathrm{d}t \\
&= \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 Z^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\mathrm{d}t + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}B
\end{aligned}
\tag{6-4}
$$

为了对公式(6-4)更进一步简化，我们将 Z^2 用它的期望值 1 代替，这样将得到：

$$
\mathrm{d}V = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S \frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)\mathrm{d}t + \sigma S \frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}B \tag{6-5}
$$

Z^2 趋向于 1 的理由在于任何微分项的和都包含近似等于均值的平均数. 这样我们清楚地完成了推导过程.

至此第 2 步和第 3 步已经完成，前面的过程完全是与金融背景无关的纯粹数学的推导，也就是说 V 可以是任何物理变量. 接下来我们要结合金融知识来完成整个推导过程. 111

6.4 投资组合的构造方法

在第 2 章 2.3 中，我们采用过一种复制组合的方法，即复制资产组合，这种方法使我们可以在离散时间模型下计算某一状态下的衍生产品价格. 接下来我们将采用同样的方法. 我们将采用一些技巧推出股票价格在服从方程(6-1)下的一些属性.

股票价格满足方程(6-1)的假设使我们可以得到当股价随时间变化时总的投资收益情况. 我们接下来要寻找一种适当的股票/债券投资比例，目的是使得任意时刻我们的投资组合的净值正好是目标值期权的价格 $V(S_t, t)$.

与前面一样，我们仍假设 $V(S_t, t)$ 是关于变量 S 和 t 的平滑函数. 可以发现，如果令：

$$
\phi(t) = \text{股票的股数}
$$
$$
\Psi(t) = \text{债券的数量}
$$

并且令方程

$$
V(S_t, t) = \phi S_t + \Psi P_t \tag{6-6}
$$

在 $0 \leqslant t \leqslant T$ 时总是成立，则该方程满足资产组合的净头寸就是持有的股票和债券的市值的要求，这里 P_t 是单位债券的价值. 可以推出资产组合净资产的变化服从如下方程：

$$
\mathrm{d}V = \phi \mathrm{d}S_t + \Psi \mathrm{d}P_t \tag{6-7}
$$

这一推理并不能直接得出，我们将在本章的 6.7 节中给出公式(6-7)的详尽推导过程. 下面我们继续完成 Black-Scholes 方程的推导过程.

由于

$$
\mathrm{d}S = \mu S\mathrm{d}t + \sigma S\mathrm{d}B
$$

且

$$dP = rP\,dt$$

我们可以将公式(6-7)重新写成：

$$dV = (\mu\phi S + r\Psi P)dt + \sigma\phi S dB$$

将方程(6-5)和(6-7)右边取等就可以得到：

$$(\mu\phi S + r\Psi P)dt + \sigma\phi S dB = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \mu S\frac{\partial V}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt + \sigma S\frac{\partial V}{\partial S}dB$$

这个表达式看上去好像还是令人感觉一头雾水，但离最终目的已不远了．我们可以自由选择 ϕ 和 Ψ 的条件还没有用到，令：

112

$$\phi(t) = \frac{\partial V}{\partial S}(S_t, t) \tag{6-8}$$

这样的选择不仅可以使 dB 项消失掉，也可以去掉 $\mu\phi S$ 项和 $\mu S\frac{\partial V}{\partial S}$项．这样就只剩下：

$$r\Psi P dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt \tag{6-9}$$

再从方程(6-6)我们可以知道 $\Psi P = V - S\frac{\partial V}{\partial S}$，代入公式(6-9)[⊖] 就可以得到：

$$r\left(V - S\frac{\partial V}{\partial S}\right)dt = \left(\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\right)dt$$

这样我们得到了期权价格的偏微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} + rS\frac{\partial V}{\partial S} - rV = 0 \tag{6-10}$$

这就是著名的关于股票期权价格的 Black-Scholes 偏微分方程．方程(6-10)的导出被认为是金融理论的一次重大突破．

初始条件与 Black-Scholes 偏微分方程

为了进一步得到诸如欧式看涨期权等衍生产品的价格，方程(6-10)必须结合边界条件进行求解．欧式看涨期权的边界条件有三个：

1. 损益状态：$V(S, \tau) = (S - X)^+$．这一条件的含义相当明确，期权到期时候的损益就是它的价格．

2. 对于完全实值(deep-in-the-money)状态的期权有 $\lim\limits_{S\to\infty} V(S, t)/S = 1$．由于此时期权的价格接近 $S - X$，因此这一比率为 1．

3. $S(t_0) = 0$ 意味着对于 $t > t_0$ 有 $V(S, t) = 0$．股票价格一旦为 0，一般不会再回到原状态．

注意：方程(6-10)给人的第一感觉仍然有些复杂．我们可以将变量做一些变

⊖ 原书中为公式(6-8)．

化，将方程变为：

$$\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = \frac{\partial V}{\partial t}$$

这一方程则在任何关于偏微分方程的书上都会有介绍.

习题

1. 设 $V(S, t) = aS + be^{rt}$，证明对于任何常数 a 和 b，V 都满足 Black-Scholes 方程(6-10). 分析在条件 $S=0$ 及 $S\to\infty$ 下 V 到期时的边界特点. 如果 $a=1$ 且 $b<0$ 时，V 代表什么金融衍生产品？ 113

2. 设 $V(S, t) = e^{at}S^2$，证明存在 a，使得 V 满足 Black-Scholes 方程.

提示：答案为 $a = -(\sigma^2 + r)$

3. 设 $G(S, t)$ 是下面方程的解：

$$\frac{\partial G}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 G}{\partial S^2} + rS\frac{\partial G}{\partial S} = 0$$

该方程不是 Black-Scholes 方程，因为它没有最后一项，$-rG$. 证明：

$$V(S,t) = e^{rt}G(S,t)$$

满足 Black-Scholes 方程.

6.5 Black-Scholes 微分方程求解方法

求解微分方程的最简单的方法就是对解做出猜测然后代入验算. 我们“设想”(见方程(5-10))：

$$V = S_0 N(d_1) - Xe^{-r\tau}N(d_2) \tag{6-11}$$

代入微分方程，并检验它确实满足微分方程(6-10). 我们把检验公式(6-11)满足微分方程(6-10)的过程留给读者.

方程(6-10)还有许多其他解. 但对某一指定的期权价格而言，符合条件的则是满足期权到期时边界条件的那一个解. 所有期权在到期时都满足方程(6-10)，某个指定的期权的价格必须还满足该期权的期初及期末时的边界条件.

6.5.1 现金 0-1 期权

回忆 5.2 节中的内容，我们用函数 $N(x)$ 来表示概率 $\Pr[Z\leqslant x]$，N 有如下属性：

- 当 $x\to+\infty$ 时，$N\to 1$
- 当 $x\to-\infty$ 时，$N\to 0$
- $N' = (1/\sqrt{2\pi})e^{-x^2/2}$，并可推出 $N'' = -xN'$

前面两个属性可以帮助我们找到一个满足到期时值及边界条件的解. 恒等式 N'' 有助于检验是否满足方程(6-10).

假设 X 和 σ 为两个正数，b 为我们选定的常数，我们将用下面的式子替代

$N(x)$中的 x：

114

$$d(t,S) = \frac{\ln(S/X)}{\sigma\sqrt{T-t}} + b\sqrt{T-t}$$

函数 $d(t, S)$具有如下性质：

- 当 $t \to T$ 时，如果 $S > X$，则 $d \to +\infty$
- 当 $t \to T$ 时，如果 $S < X$，则 $d \to -\infty$
- $\partial d / \partial t = d/2(T-t) - b/\sqrt{T-t}$

我们按如下公式定义 $\tilde{V}$：

$$\tilde{V}(S,t) = N(d) \tag{6-12}$$

方程(6-12)几乎就是一个金融衍生产品的价格．注意这里 N 和 d 的性质，当 t 趋向于到期时间 T 时，$\tilde{V}$ 的价值要么为 1，要么为 0．事实上，如果 $S>X$，则 $\tilde{V} \to 1$；如果 $S<X$，则 $\tilde{V} \to 0$.

我们将到期时具有这样特性的金融产品定义为现金 0-1 期权(cash or nothing derivative)．该期权在到期时刻 T 的价格如下：

- 如果股票价格表现好($S>X$)，则期权的期末价值为 1 元；
- 如果股票价格表现不好($S<X$)，则期权的期末价值为 0.

同样，任何时候如果 $S \to 0$，则 $d \to -\infty$，从而 $\tilde{V} \to 0$，期权将一文不值．如果 $S \to \infty$，则 $d \to \infty$，从而 $\tilde{V} \to 1$．这些都与现金 0-1 期权的边界值一致.

那么 $\tilde{V}$ 是否是某种金融衍生产品的价格呢？检验下面的恒等式：

$$\frac{\partial \tilde{V}}{\partial t} + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 \frac{\partial^2 \tilde{V}}{\partial S^2} + rS\frac{\partial \tilde{V}}{\partial S} = 0 \tag{6-13}$$

检验时需要对 $N(d)$求导，并在结果中用 N'和 d 表示．可以证明要使等式(6-13)成立，必须令 $b = r/\sigma - \sigma/2$.

遗憾的是方程(6-13)并非 Black-Scholes 方程，但这个问题容易解决，如果我们令：

$$V = e^{-r(T-t)}\tilde{V}$$

此时 V 仍然满足边界要求，同时增加的因子 e^{rt} 使得 V 能够满足 Black-Scholes 方程(6-10)的要求，因此

$$V(t,S) = e^{-r(T-t)}N[d(t,S)] \tag{6-14}$$

就是报价为 S 的股票在时刻 t 的衍生产品的价格.

6.5.2 股票 0-1 期权

方程(6-12)表达的是一个简单期权的到期损益，即到期时我们要么得到 1 元钱，要么什么都没有．对方程(6-12)的一个有趣的修正是：

115

$$V = SN(d)$$

与前面一节一样，d 也定义为：

$$d(t,S)=\frac{\ln(S/X)}{\sigma\sqrt{T-t}}+b\sqrt{T-t}$$

从前面的推理我们容易知道，当期权到期时，V 要么为 S，要么为 0. 事实上，如果 $S>X$，$V\to S$；如果 $S<X$，$V\to 0$. 同样，任意时刻，如果 $S\to 0$，则必有 $V\to 0$；如果 $S\to\infty$，则 $V\approx S$.

满足这类边界条件和到期特征的产品我们称为**股票 0-1 期权**(stock or nothing derivative)，其在 T 时刻的损益如下：

- 如果股票价格表现好($S>X$)，则期权的期末价值为股票价格 S；
- 如果股票价格表现不好($S<X$)，则期权的期末价值为 0.

那么此时的 V 是否是某期权的价格呢？答案是肯定的. 读者证明可以发现 V 满足方程(6-10). 与前面现金 0-1 期权相比，因子 S 的出现使得通过合并一些项后改变了求偏导数的结果. 要使方程(6-10)仍然成立，$\tilde{b}$ 需要定义如下：

$$\tilde{b}=r/\sigma+\sigma/2$$

通过对 b 的重新定义后，股票 0-1 期权的价格可以简单写成如下：

$$V=SN(\tilde{d}) \tag{6-15}$$

6.5.3 欧式看涨期权

接下来我们将前面的两个期权进行组合，得到看涨期权.

假设我们持有一份股票 0-1 期权，盈亏的临界设定为 X，同时卖出 X 份现金 0-1 期权. 则任何时刻我们投资的净头寸就是等式(6-14)和(6-15)表示的价格之差：

$$SN(\tilde{d})-Xe^{-r(T-t)}N(d)$$

我们来分析一下到期时的市值情况，如果股票表现不好，则我们买卖的两个资产的值都为 0，如果股票的表现好($S>X$)，则我们的损益就是 $S-X$.

我们这样构造的新的资产组合就是欧式看涨期权到期时刻的损益. 上面的表达式的确与 Black-Scholes 定价公式相一致. 我们这里介绍的新方法是采用了另外两类期权的价格.

6.6 期货期权

与标的资产(underlying asset)相比，期货交易的好处就是交易成本低. 因此投资组合管理时如果要调整的是期货而不是股票，花费就少多了. 世界主要金融市场都可以很方便地进行期货合约的交易.

关于期货合约的欧式看涨期权的交易也很普及，通常看涨期权的到期日就是期货合约的交割日(清算日). 由于交割价格就是资产的价格，我们可以认为期货的欧式看涨期权的价格非常接近普通的欧式看涨期权价格. 116

我们定义期货的价格为 F. 由第 1 章的知识，F 和 S 存在如下等式关系：

$$F_t = S_t e^{r(T-t)}$$

即期货价格 F 只与股票相关，并且是简单的相关关系.

6.6.1 期货合约的看涨期权

我们首先从普通看涨期权的 Black-Scholes 公式(5-10)开始，并且用期货价格的形式来表达. 在公式(5-10)中有：

$$d_1 = \frac{\ln(S_0/X) + (r+\sigma^2/2)\tau}{\sqrt{\tau}\sigma} \tag{6-16}$$

且

$$d_2 = d_1 - \sqrt{\tau}\sigma, \quad \tau = T - t$$

用 $Fe^{-r\tau}$ 代替 S_0 可以得到：

$$d_1 = \frac{\ln(Fe^{-r\tau}/X) + (r+\sigma^2/2)\tau}{\sqrt{\tau}\sigma}$$

将对数项展开并化简，则有：

$$d_1 = \frac{\ln(F/X) + \sigma^2\tau/2}{\sqrt{\tau}\sigma}$$

同样地：

$$d_2 = \frac{\ln(F/X) - \sigma^2\tau/2}{\sqrt{\tau}\sigma}$$

结果 d_1 和 d_2 都是关于期货价格的简单函数. 更进一步地，关于看涨期权的公式(5-10)可以写成：

$$S_0 N(d_1) - e^{-r\tau} X N(d_2) = e^{-r\tau}[e^{r\tau} S_0 N(d_1) - XN(d_2)]$$

这样将 Black-Scholes 公式用期货价格来表达出来了，并得到了**期货看涨期权**：

$$C(F,t) = e^{-r(T-t)}[FN(d_1) - XN(d_2)] \tag{6-17}$$

在公式(6-17)中：

117

$$d_1 = \frac{\ln(F/X) + (\sigma^2/2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}$$

及

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$$

这样我们得到了关于期货的看涨期权价格的完整表达式，注意到这里 d_1 和 d_2 的表达形式比股票看涨期权的表达更简单一些. 在下一节我们将通过价格对冲的方法对这一公式予以证明.

例 若股票指数点位是 702，其波动率估计值 $\sigma=0.4$. 指数期货合约将在 3 个月后到期，并在到期时用美元按期货价格结算. 期货合约的价格是 715 美元.

关于期货的看涨期权到期时间与期货相同，执行价是 740 美元，短期利率为 7%，问

这一期权的理论价格应是多少？

我们将已知条件写成如下：

$$F=715 \qquad T-\tau=0.25 \qquad \sigma=0.4$$
$$X=740 \qquad r=0.07$$

参照方程(6-17)，有：

$F/X=715/740=0.9662$ 且 $\sigma\sqrt{T-t}=0.4(0.5)=0.2$

$$d_1 = \ln(0.9662)/0.2+0.2/2 =-0.071922$$
$$d_2 = d_1-0.2 =-0.2271922$$

然后查正态分布表，得：

$$N(d_1) = 0.4721 \text{ 及 } N(d_2) = 0.3936$$

我们最终算出表达式(6-17)：

$$G =(0.98265)(0.4721\times 715-0.3936\times 740)$$
$$=45.48(\text{美元})$$

6.6.2 期货期权的偏微分方程

通过求解 Black-Scholes 方程得到期权的价格，这一方法不仅适合于标的资产(本例中为股票)，也适合于相应的期货合约．公式(6-17)的看涨期权价格就是一个最主要的例子．

与前面一样，我们定义期货价格 F，且 F 与 S 存在如下关系：

$$F_t = S_t e^{r(T-t)}$$

现在假设关于期货的期权价格可以表达为：

$$G(F_t,t)$$

且函数 $G(F,t)$存在偏导数．我们将通过假想的股票期权的方法来找到 G 的表达公式．

我们将价格公式

$$G(Se^{r(T-t)},t)$$ 118

看作是股票的金融衍生产品．从而该价格将满足微分方程(6-10)．我们下面给出一些偏微分方程，首先：

$$\frac{\partial}{\partial S}G(Se^{r(T-t)},t) = \frac{\partial G}{\partial F}e^{r(T-t)}$$

因为价格表达形式为(GcS，t)，我们这里可以采用连锁法则．再次微分得到：

$$\frac{\partial^2}{\partial S^2}G(Se^{r(T-t)},t) = \frac{\partial^2 G}{\partial F^2}e^{2r(T-t)}$$

对比方程(6-10)，带有$\frac{\partial G}{\partial S}$的项也有 rS 因子，这正好与前面的一阶偏导数匹配．由于 $Se^{r(T-t)}=F$，我们可以得到：

$$rS\frac{\partial G}{\partial S} = rF\frac{\partial G}{\partial F}$$

同样地，带有$\frac{\partial^2 G}{\partial^2 S}$的一项也有$\frac{\sigma^2 S^2}{2}$因子，我们简化后得到：

$$\frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 G}{\partial S^2}=\frac{\sigma^2}{2}F^2\frac{\partial^2 G}{\partial F^2}$$

另外剩下的一项偏导是：

$$\frac{\partial}{\partial t}G(Se^{r(T-t)},t)$$

由于该函数中 t 出现了两次，我们必需求两次偏导：

$$\frac{\partial}{\partial t}G(Se^{r(T-t)},t)=-rSe^{r(T-t)}\frac{\partial G}{\partial F}+\frac{\partial G}{\partial t}$$

等式右边可以简化为：

$$-rF\frac{\partial G}{\partial F}+\frac{\partial G}{\partial t}$$

注意到上面带有$-rF$的项可以与 Black-Scholes 方程中的一阶偏导约简掉. 我们将各项代入方程(6-10)就可以得到相当简单的期货期权的偏微分方程：

$$\frac{\partial G}{\partial t}+\frac{1}{2}\sigma^2F^2\frac{\partial^2 G}{\partial F^2}-rG=0 \tag{6-18}$$

习题

1. 证明方程(6-17)中的期权价格满足偏微分方程(6-18).

2. 若股票指数点位是 1450，其波动率估计值 $\sigma=0.2$. 指数期货合约将在 3 个月后到期，并在到期时用美元按期货价格结算. 期货合约的价格是 1472 美元. 关于期货的看涨期权执行价是 1460 美元，利率为 5%，问这一期权的理论价格应
119 是多少?

3. 设 $V(S,t)$是 $r=0$ 时情形下方程(6-10)的解，证明下面公式

$$G(F,t)=e^{-r(T-t)}V(F,t)$$

满足关于期货的方程(6-18). 此题说明不同类型的期权价格是相关的.

6.7 附录：资产组合的微分

基于股票和债券的连续时间投资可以用如下公式来进行模拟：

$$\Pi_t=\phi S_t+\Psi P_t$$

及

$$d\Pi_t=\phi dS_t+\Psi dP_t$$

第 2 种表达，即 6.4 节中的公式(6-7)，无论如何也不能由连锁法则直接得到，这一点容易产生混淆. 为了更清楚地说明这一点并强调公式(6-7)的重要性，我们讨论一个有实际意义的资产组合，并设其是随时间变化的.

我们任意地把时间段细分成许多小区间$[t_k, t_{k-1}]$，则资产组合的总的变化可以由每个区间上的变化得到，即：

$$\Pi_T - \Pi_0 = \sum \Delta\Pi_{t_k}$$

这里将 $\Pi_{t_{k+1}} - \Pi_{t_k}$ 简写成 $\Delta\Pi_{t_k}$. 接下来，我们做一个假设，即任意小的区间上股票和债券的持有数量 ϕ 和 Ψ 在期初都不发生变化.

小区间上做这样假设得到的投资组合将与长区间上的投资组合有些不一样，我们将其定义为 F_t.

持有数量不变的假设使我们可以将每个区间上的收益表达为：

$$\Delta F_{t_k} = \phi_{t_k}\Delta S_{t_k} + \Psi_{t_k}\Delta P_{t_k} \tag{6-19}$$

该式表明资产组合的价值只随每个资产的价格发生变化.

我们的目标是要通过 F_T 找到 Π_T 的表达式，可以肯定下式是成立的：

$$F_T - F_0 = \sum \Delta F_{t_k}$$

我们用公式(6-19)代入，就可以得到一个关于 ΔS 和 ΔP 的表达式.

$$F_T - F_0 = \sum \phi_{t_k}\Delta S_{t_k} + \sum \Psi_{t_k}\Delta P_{t_k}$$

这里我们要用到一些关于股票模型的技巧. 我们知道[1]，随着 $\Delta t_k \to 0$，每个求和项都有极限. 结果可用数学表达如下： 120

$$\int_0^T \phi(t)\mathrm{d}S + \int_0^T \Psi(t)\mathrm{d}P \tag{6-20}$$

因为每一项都是 L－可积的.

我们没必要进一步计算，因为知道当 ϕ 以及 Ψ 连续时存在极限就足够了. 但能够利用极限的惟一性很重要.

计算的答案并不依赖于我们在保持不变的投资方案的条件下对时间段的选择. 也就是说，如果我们构造一个不变的投资方案后，对于所有的 F_t 都会随分割的时间区间趋于 0 而收敛到公式(6-20).

公式(6-20)是不是就是 Π_T 呢？也许不是. 我们必须做出肯定的回答.

我们可以用积分的形式对 Π_T 做出定义. 这个推理似乎是循环论证，但做出这样推理的原因是由于 Π_t 可以决定债券的持有数量. 对每个时刻 t，我们定义 Π_t 是下面方程的解：

$$\Pi_t = \phi S_t + \Psi P_t$$

我们可以认为 Π_T 是由(6-20)构造的积分方程的解. 此后我们将这个积分等式写成资产组合微分形式：

$$\mathrm{d}\Pi_t = \phi \mathrm{d}S_t + \Psi \mathrm{d}P_t \tag{6-21}$$

我们在分析连续时间的投资组合时将采用 Π 的这一定义形式. 121

---

[1] 参见 Karatzas, I., and Shreve, S., Brownian Motion and Stochastic Calculus, 2nd edition, Springer-Verlag, New York, 1996

第7章 对　冲

我给摩根先生一份报告，并告诉他自己准备拿出一半的资金去冒一次险．摩根先生回答说："我从不冒险"．

——Bernard Baruch

每天银行、跨国公司、投资机构、基金以及投资者都会从事大量金融交易．这些机构或者个人都希望能够防范风险，或者使风险与不确定性降低到能够承受的水平．

对冲就是一种使风险降至最小的方法．对冲是保险的一种形式，人们可以对股票、债券、利率、商品以及期货实现对冲．

在这里我们不能穷尽所有的对冲形式，只探讨在股票投资时如何利用期权进行对冲．首先从简单的德尔塔对冲技术开始．

7.1　德尔塔对冲

假设你是一名交易员，刚刚卖出 ABC 公司的 1000 股看涨期权，那么你需要防止股票上涨带来损失，只需买进 1000 股股票即可．事实上，你做的是出售了一个带抛补的看涨期权．但这样做至少有两点错误：

- 如果 ABC 股票下跌，你会输钱．
- 买进 1000 股股票，你需要借一大笔钱． 122

实际上你可以采用下面介绍的德尔塔对冲．我们下面用一种简单的方法来说明德尔塔对冲．假设你卖出了一个看涨期权，并预测当股价上涨 1 美元时，期权的价格上涨 0.5 美元，换句话说，2 : 1 的关系．那么你的投资组合帐户的平衡方法应该是卖出 100 份看涨期权与买进 50 股股票，或者说卖出 40 份看涨期权与买进 20 股股票．

当股价上涨 1 美元时，看涨期权的价格上涨 0.2 美元，即比率为 5 : 1 的关系．那么进行对冲或者与 100 份看涨期权保持平衡，你需要卖出 20 股股票．

那么前面提到的"2 : 1"或者"5 : 1"如何用数学术语来表达？我们称之为期权价格变化与股票价格变化比率：

$$\text{比率} = \frac{\text{期权价格变化}}{\text{股票价格变化}}$$

或者我们写成另一种形式：

$$\text{比率} = \Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$$

德尔塔对冲的思路给我们提供了一个简单的使投资帐户中期权与股票价格变化相

匹配的方法，或者说使二者此消彼涨.

7.1.1 对冲、动态规划与理想条件下 Black-Scholes 运作机制

我们现在构造一个投资组合，其中股票数量为 a，卖空一份期权，同时持有一定数量现金或者某一数量的债务，使净头寸为 0. 换句话说，投资组合的价值为：

$$\Pi = aS - V + C$$

它的微分形式为：

$$\mathrm{d}\Pi = a\mathrm{d}S - \mathrm{d}V + rC\mathrm{d}t \tag{7-1}$$

读者应明白这里为什么可以用 $rC\mathrm{d}t$ 替代 $\mathrm{d}C$.

我们需要找到一个合适的 a，使得 $\mathrm{d}\Pi=0$. 联想到我们在第 6 章中关于 $\mathrm{d}V$ 的内容，可以得到：

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}(\mathrm{d}S)^2 + \text{高阶项}$$

$$\approx \frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{\partial V}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2}\mathrm{d}t$$

又由 Black-Scholes 方程(6-10)知：

123

$$\frac{\partial V}{\partial t} + \frac{\sigma^2}{2}S^2\frac{\partial^2 V}{\partial S^2} = rV - rS\frac{\partial V}{\partial S}$$

我们写成：

$$\mathrm{d}V = \frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}S + rV\mathrm{d}t - rS\frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}t$$

将该式代入方程(7-1)得到：

$$\mathrm{d}\Pi = a\mathrm{d}S - \left(\frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}S + rV\mathrm{d}t - rS\frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}t\right) + rC\mathrm{d}t$$

通过选择 $a=\dfrac{\partial V}{\partial S}$，则有：

$$\mathrm{d}\Pi = r(-V + Sa + C)\mathrm{d}t = r\Pi\mathrm{d}t$$

由于初始状态下 $\Pi=0$，因此 $\mathrm{d}\Pi=0$

这样我们得到了德尔塔对冲的另外一种推导方法. 这里还有另外一些结论，如果假设我们的对冲计划初始时刻，即 $t=0$ 时的资产为：

$$\Pi = aS - V + C$$

那么随着时间的变化，我们可以随着 V 和 S_t 的变化瞬时重新调整资产组合，即 S、Π、Δ 和 C 都与时间有关. 通过对资产组合瞬时调整 $\Delta(t)$ 的实施(以平衡股价 S 的变化)，我们可以保证每一个瞬间都有：$\mathrm{d}\Pi=r\Pi\mathrm{d}t$.

但由于 $\Pi(0)=0$，因此对于任意 $0\leqslant t\leqslant T$ 都有 $\Pi(t)=0$. 写成微分方程的另外一种形式即：

$$\frac{\mathrm{d}\Pi}{\mathrm{d}t}=r\Pi$$

如果 $\Pi(0)=0$，则意味着对于所有 t，$\Pi(t)=0$ 成立．当然 T 时刻我们的资产组合总价值也为 0．因此不管 T 时刻股票价格 S_T 为多少，我们的股票头寸与期权头寸处于平衡状态．

上面最后的表述是为了说明在股票价格服从几何布朗运动的理想环境下 Black-Scholes 定价一定是期权的惟一正确答案，同时我们可以瞬时动态调整 $\Delta(t)$．

7.1.2　Black-Scholes 模型与现实世界的差距

从前面的论述知道，我们必须瞬时无限次地调整资产组合．这要求我们在时刻 t_0 根据已知的 $S(t_0)$ 通过买卖股票瞬时调整 $\Delta(t_0)$．我们计算得到的买卖的股票数量并不一定是整数倍，因为买卖是按如下比率进行的：

$$\frac{\mathrm{d}(\Delta t)}{\mathrm{d}t}$$

而且这一比率是一直变化的．显然在现实世界中这种模式的交易是不可能完成的．此外，在上述过程中我们并没有考虑资产组合构建过程中的买卖价差或者交易成本问题． 124

7.1.3　早期的德尔塔对冲

我们注意到在上面连续的交易中，对冲比率

$$\Delta=\frac{\partial V}{\partial S} \tag{7-2}$$

回过头来看看第 3 章中讲到：

$$a=\frac{U-D}{S_u-S_d}$$

该式是离散情形下的对冲，但：

$$\begin{aligned} U-D &= \Delta V \\ &= \text{衍生产品价格的差分} \end{aligned}$$

且

$$\begin{aligned} S_u-S_d &= \Delta S \\ &= \text{股票价格的差分} \end{aligned}$$

因此

$$a=\frac{\Delta V}{\Delta S} \tag{7-3}$$

公式(7-3)就是(7-2)的离散情形．

对冲法则：

对冲就是卖出一份期权，同时买进 Δ 股股票．

我们来看一下怎样具体运用这一法则．首先我们需要计算 Δ．幸运的是，对于看涨期权而言，计算还比较简便．注意我们是在运用 Black-Scholes 模型中的 $\Delta=\frac{\partial V}{\partial S}$，而不是现实世界中的数据计算 $\frac{\partial V}{\partial S}$．通过对 Black-Scholes 公式(5-10)进行微分，可以得到

$$\Delta = Nd_1 \tag{7-4}$$

这一公式的推导仍需一定技巧．我们将在第 7.5 节中给出详细推导．

例 我们准备卖出 1000 份 ABC 公司的股票期权，这里 $S_0=50$，$X=40$，$r=0.05$，$\sigma=0.30$，$T=1$ 年．这样：

$$d_1 = \frac{\ln 50/40 + (0.05 + 0.30^2/2)}{0.30} = 1.060$$

因此

$$\Delta = 1.060N = 0.8554$$

因此为了对我们卖出的 1000 份股票期权进行对冲，我们必须购买 855 股 ABC 公司的股
125 票．至此，期权出售者完成了对股票市场价格变化的对冲．但是 Δ 对冲过程并不是一蹴而就的．我们必须连续调整，下面来看这一过程是如何完成的．

假设我们每周进行一次对冲．表 7-1 给出了每周的股票价格及计算得到的相应的对冲股票数量．

接下来我们进行一下具体分析．在第 1 周(到期时间为 1 年)，我们买了 855 股股票进行对冲．第 2 周股票价格上升，并导致期权价格相对股票出现上升．我们需再购买 23 股股票进行对冲，使持股数达到 878 股．

第 3 周股票价格下跌，Δ 值也下跌．此时，我们只需持有 841 股股票，即为了保持对冲状态我们要卖出 37(=878－841)股股票．采用类似的方法，直到期权到期．

表 7-1 股票 ABC 的德尔塔对冲

到期时间周数	股票价格	d_1	$\Delta=Nd_1$	股票股数
52	50	1.060	0.8554	855
51	51.5	1.164	0.8778	878
50	49	1.00004	0.8413	841

Δ 对冲有许多缺点，这里列出主要的两条：

1. 仔细观察表 7-1 就可以看出，我们似乎面临着一个对冲滑道问题．股票价格上升后我们买的股票多，股票价格下跌后我们买的股票反而少．

我们实质上是陷入了高买低卖的模式，这显然是股票交易中的大忌．我们通过这种对冲模式将风险降到最低，但却产生了另外的问题．

2. 因对冲产生的交易成本是客观存在的，因为我们定期在调整自己的头寸．

上面的例子说明了在卖空期权时对冲的方法．一份期权需要 Δ 股股票进行对

冲，另一方面，我们应该也可以想到期权也可以用来对一股股票进行对冲．对一股股票对冲需要的期权数量是 $1/\Delta$．下面我们将介绍对股票或者股票资产组合进行对冲的其他方法．

7.2 股票或资产组合的对冲方法

7.2.1 采用看跌期权对冲

人们可以通过直接购买股票看跌期权或者指数看跌期权来对资产组合进行对冲．由此产生的细节问题是资产组合对冲的比例的确定以及选择看跌期权的数量． 126

对冲方案选择不一样，对冲的成本将差异很大．你可以选择购买资产组合中每一个股票的看跌期权，但如果选择指数看跌期权成本就低多了．

7.2.2 采用双限对冲

采用双限(collar)对股票进行对冲，是指一方面买进平值看跌期权，同时又卖出虚值看涨期权．通过适当的选择，使卖出期权的收入正好等于购买期权所需金额，这样投资者就无需额外支出了．如果股票下跌，投资者处于保护状态．如果股票价格上升了，则在股票上得益．

7.2.3 采用成对交易对冲

假设在同一产业中有两个公司："超级商品"与"倒霉企业"．这两家公司的质量正如它们的名字一样．我们买进 100 股超级公司的股票，同时卖出相同市值的倒霉公司的股票．

如果经济处于高涨周期，两家公司的股票都会上升，但超级公司的上升幅度会大一些．反过来如果经济处于萧条周期，两家公司的股票都会下跌，但倒霉公司的下跌幅度会大一些．如果外部的或者内在因素造成了对两家公司所在行业的一些冲击，则可以采用相同的方法进行分析．因此不管将来发生什么情形，超级公司的股票表现总是相对好于倒霉公司．

一眼看来这种方法好像太好了，以至于不像是真的，因为我们总是不输钱．但事实确实如此，但你应知道如果市场走好，我们只购买超级公司而不进行对冲，我们的利润会更多．因此我们在市场下跌时得到的保护是以市场上升时的利润为代价的．所有的对冲都是这一思路．

7.2.4 基于相关关系的对冲

有些股票的表现是正相关的，而另外一些是负相关的．我们可以利用这一信息构造投资组合，并使市场对投资组合的影响控制在我们设定的水平．

我们可以选择一些过去价格波动是负相关的股票购买，这些股票的涨跌是相互制约的. 另外一种方法是卖出部分股票同时买进一些与之价格变动方向相同的股票.

注意：对冲提供了保护，也带来制约. 如果我们的资产组合是由 200 种股票构成，这确实可能缓冲市场的波动，但也可能使资产的表现低于集中投资.

沃伦·巴菲特和乔治·索罗斯是不会分散投资的，他们只集中购买少数股
127 票，或者只下注于未来不确定可能性中的少数情形. 这种策略下选择的结果不管是涨还是跌，幅度都会很大. 这种方法不适合于低风险容忍水平的人.

7.2.5 现实中的对冲

1998 年 6 月 29 日《华尔街日报》(C1 版)报道了几家对冲基金的活动. 这些基金看涨抵押支撑证券，并准备通过卖空美国国债进行对冲.

由于这两种证券都会随利率变化而变化，这些对冲基金相信通过这些对冲活动可以避险. 但由于房产业主们提前偿还贷款，作为抵押贷款进行再融资，这样抵押支撑债券价格出现下跌，而国债的价格出现了上涨.

一些对冲基金，包括协兰德基金、雷因资本、瞭望 I11、MKP 资本、大西洋投资分析家、开普斯德抵押基金等，在买卖双向投资中都输了，并遭受重大亏损. 而德尔塔对冲中 Δ 的符号和大小本来都是用来保护投资者不受随机事件影响的.

7.3 隐含波动率

我们已经介绍过一类波动率的定义了(在第 5.3 节中). 历史波动率是指某段预先给定时间区间上实际市场价格的标准差.

隐含波动率是另外一种定义. 假设我们知道一个欧式看涨期权的下面信息：

S_0 = 今日股票价格

K = 执行价格

T = 到期时间

r = 无风险利率

V = 期权今日的市场价格

注意这里我们并没有给出波动率 σ. 我们将 σ 看作是下面方程中的未知数：

$$V = S_0 N(d_1) - K\mathrm{e}^{-rT} N(d_2) \tag{7-5}$$

上式右边就是 Black-Scholes 公式，σ 是未知数. 解方程(7-5)我们就得到了 σ，并将该值定义为隐含波动率 σ_I.

7.3.1 采用 Maple 软件计算波动率 σ_I

在 Maple 初始提示符下，按如下步骤进行

```
> with(finance)
```

> solve(blackscholes(S_0, K, r, T, x) = V, x);

Maple 就可以打印出 σ_I 的数值了.

7.3.2 波动率微笑

Black-Scholes 公式假设(历史)波动率在期权的存续期间为常数. 假设我们计算某一股票的隐含波动率，比如 IBM 公司. 观察一系列具有相同到期时间但执行价格不一样的欧式看涨期权. 理论上，不同期权的隐含波动率应该是一样的. 但事实上，你会发现隐含波动率的分布如图 7-1 所示.

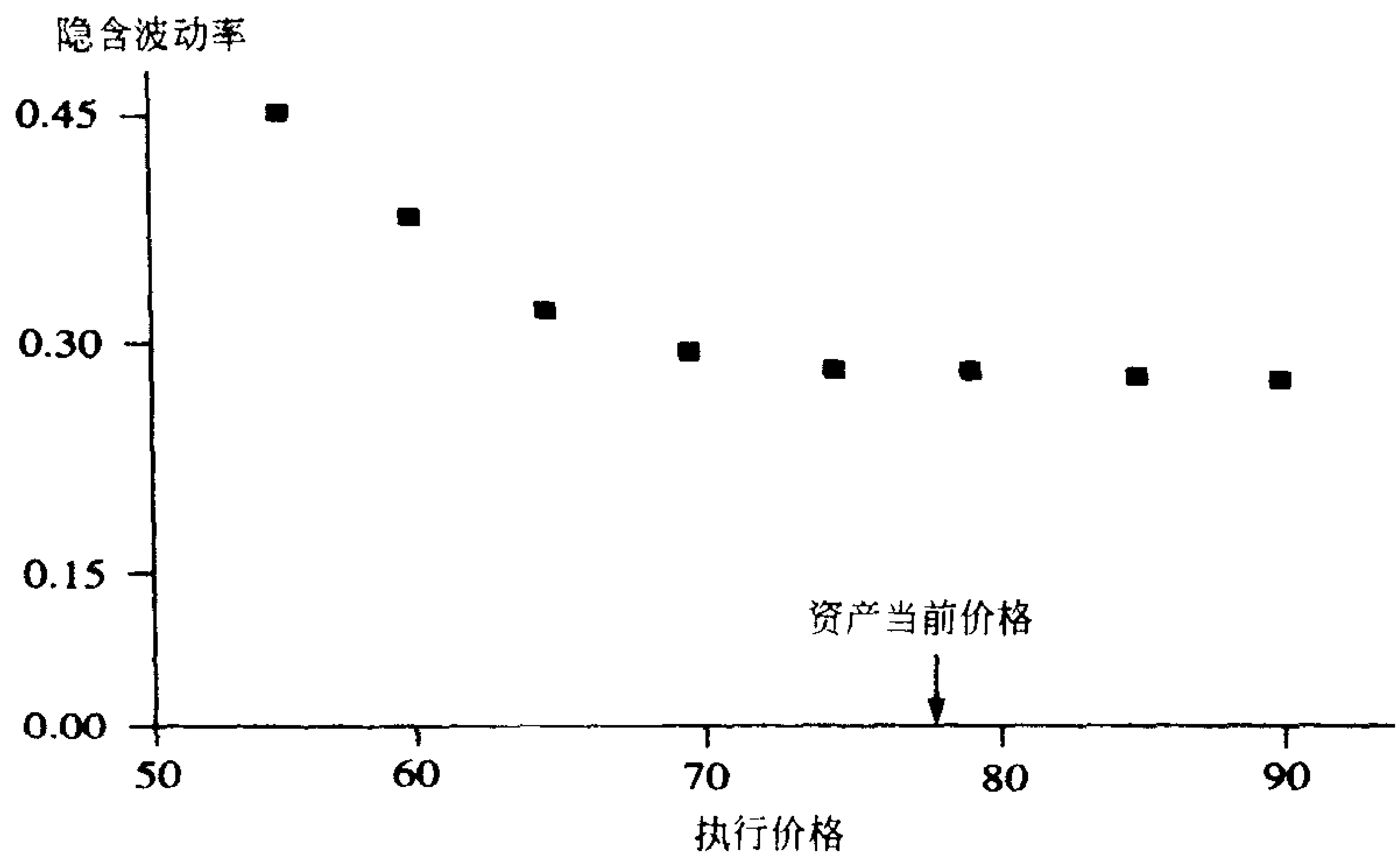


图 7-1　波动率微笑

近年来对这种现象的解释有不同的说法. 但人们应该记住的是你购买期权时不应仅仅知道股票的历史波动率. 结合公司的特定信息，人们也许会对未来做出更精确的预测. 波动率微笑也许是其他远见与洞察的一种反应.

习题

1. 已知如下信息，求相应欧式看涨期权的隐含波动率.

	S_0	K	r	T	V
(a)	40	40	0.05	3 个月	3.8
(b)	50	45	0.048	1 年	9
(c)	80	85	0.051	6 个月	3.2
(d)	100	90	0.055	4 个月	13.1
(e)	25	22	0.052	1 个月	4.6
(f)	60	60	0.049	1 年	3.1
(g)	45	60	0.047	3 个月	2

128～129

7.4 参数 Δ、Γ 和 Θ

从前面我们知道 Δ 在期权对冲中扮演着重要的角色．期权背景下仍有一些其他量能够为市场交易人员提供帮助．我们要讨论两个量：Γ(伽码)和 Θ(西塔)．

我们首先回顾一下看涨期权 $C(S, t)$的级数展开，形式如下：

$$\mathrm{d}C = \frac{\partial C}{\partial t}\mathrm{d}t + \frac{\partial C}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}(\mathrm{d}S)^2 + \text{高阶项} \tag{7-6}$$

接下来我们再回忆一下 Black-Scholes 方程(6-10)

$$\frac{\partial C}{\partial t}\mathrm{d}t + rS\frac{\partial C}{\partial S}\mathrm{d}S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = rC \tag{7-7}$$

在这两个方程中，有三项同时出现，并且都在期权定价与对冲中扮演重要角色，它们是：

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} = N(d_1) \tag{7-8}$$

$$\Gamma = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2} = \frac{1}{\sigma S\sqrt{2\pi T}}\mathrm{e}^{-d_1^2/2} \tag{7-9}$$

$$\Theta = \frac{\partial C}{\partial t} = -r\mathrm{e}^{-rT}XN(d_2) - \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Gamma \tag{7-10}$$

我们将这三个参数写在一个方程中，有：

$$\Theta + rS\Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2\Gamma = rC \tag{7-11}$$

在这些方程中：

S ＝初始时刻股票价格

r ＝无风险利率

σ ＝波动率

T ＝到期时间

X ＝执行价格

关于 Δ 的讨论已经很详尽了．那么当股票价格相对执行价格变化以及 $t \to T$(期权快要到期)时 Δ 如何变化呢？图 7-2 回答了这一问题．

可以注意到当 $t \to T$ 时，Δ 的图形在执行价格 X 处更加陡峭，并且：

$$\lim_{t\to T}\Delta(t) = \begin{cases} 0 & \text{当 } S < X \text{ 时} \\ 1 & \text{当 } S > X \text{ 时} \end{cases}$$

图形 7-2 不仅可以从 $\Delta = N(d_1)$定义中推导得到，也可以从金融实际背景中
130 分析清楚．当 $S_t > X$ 时，随着 $t \to T$，期权的价格收敛到 $S_T - X$，期权的价格 C 与 S_t 基本上同步变化，因此

$$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S} \approx 1$$

当 $S_t < X$ 时的推理是类似的，但此时 $C \approx 0$，因此 $\frac{\partial C}{\partial S}$.

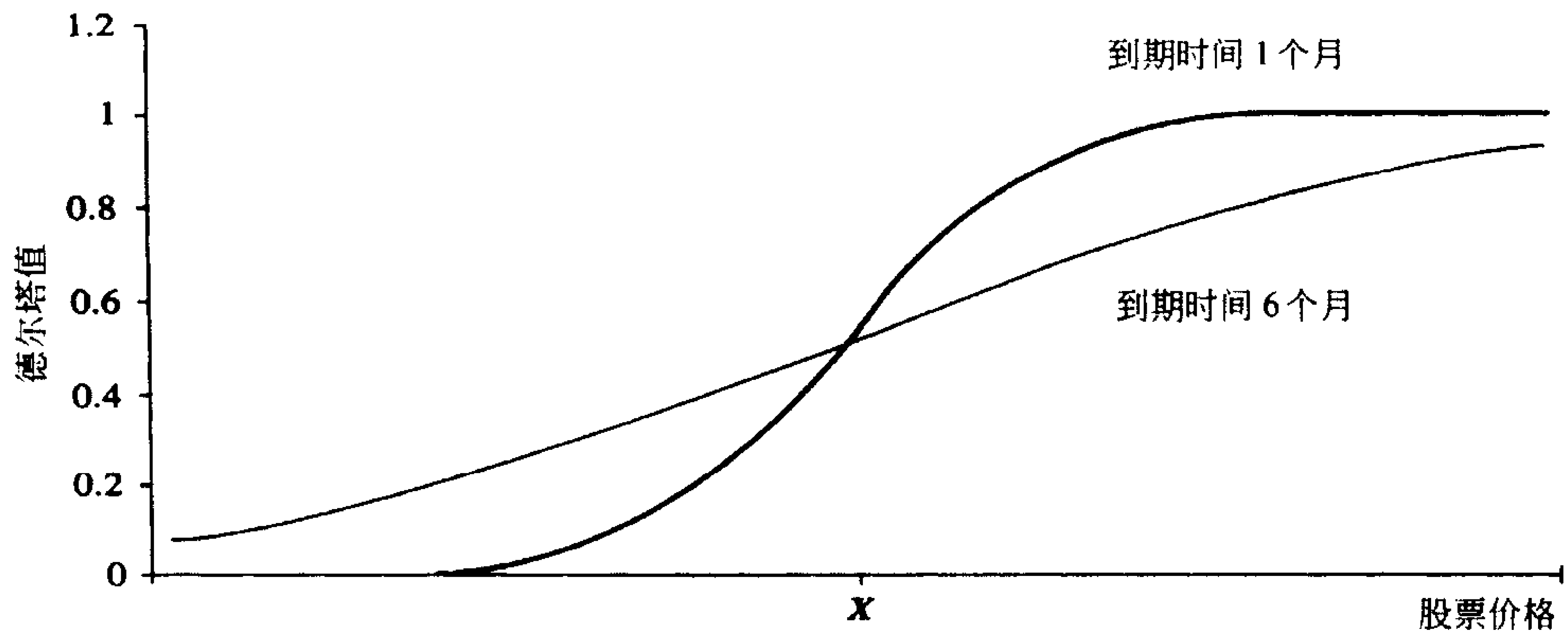


图 7-2　Δ 与股票价格

7.4.1　参数 Γ 的意义

参数 Γ 既可以用来作为 Δ 对市场变化的反应，也可以用来帮助实施更灵敏和深入一步的对冲．图 7-3 对这一机制进行了说明．

注意期权价格的曲线在点$(S, C(t))$两侧都位于切线的上方．我们可以通过方程(7-9)对这一点进行分析．Γ 总是正的，因此看涨期权的价格是关于 S 的凸

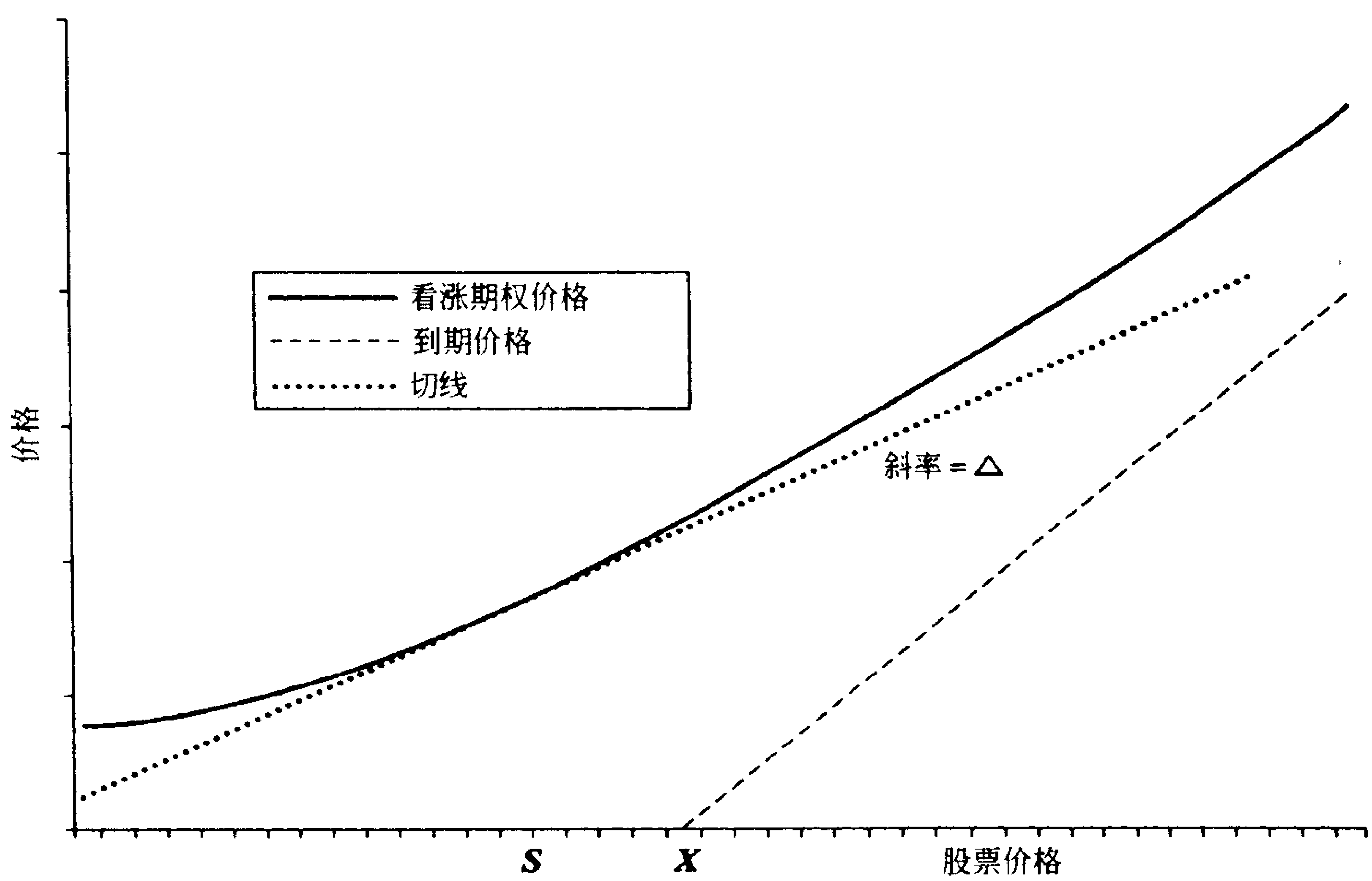


图 7-3　斜率 Δ

函数.

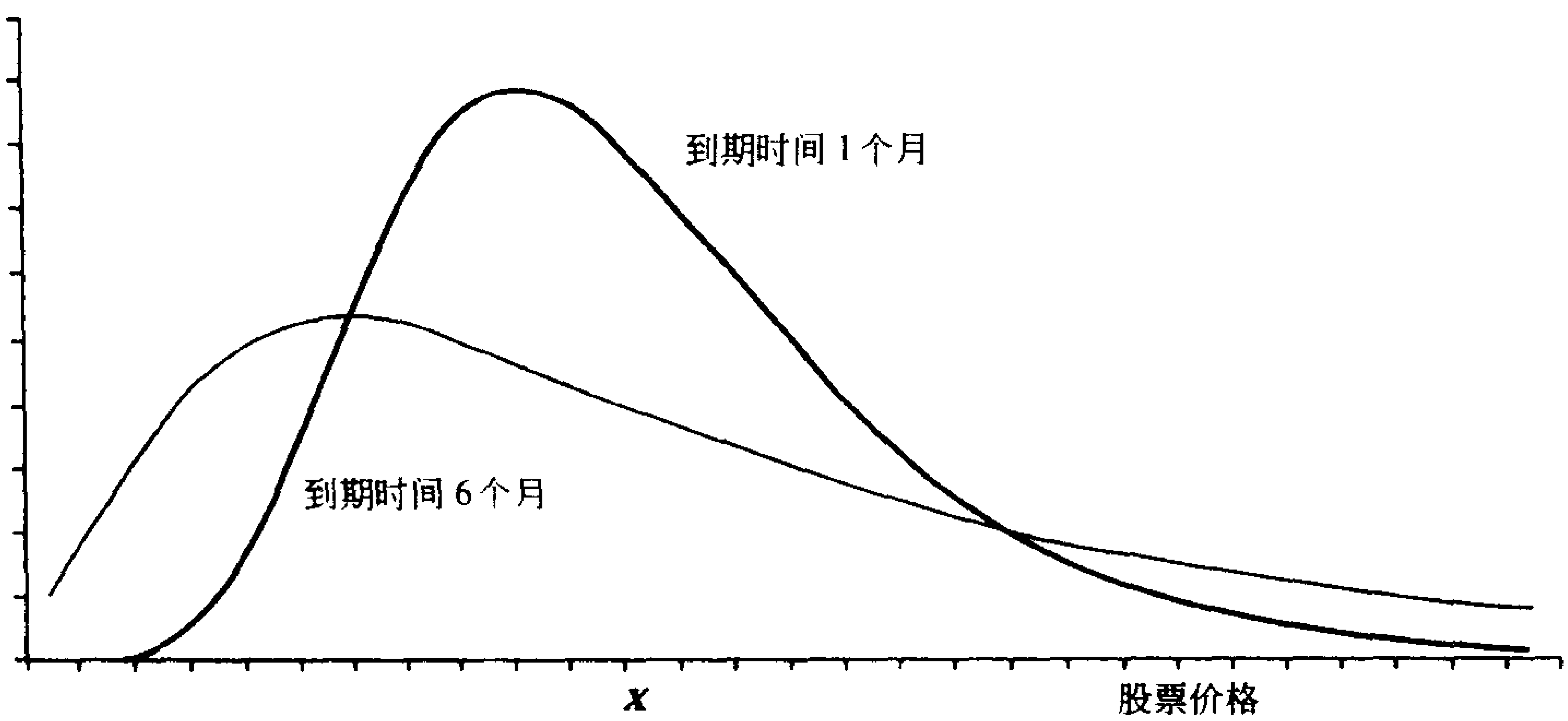
我们可以对由于 S 的变化引起的 C 的变化进行展开：

$$dC \approx \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma(dS)^2$$

为了使股票价格变化以后，期权价格的变化与之相匹配，我们必须“增加一些 Γ”，这就是读者看到的图 7-4. 当 $S \approx X$ 且到期时间很短时 Γ 达到最大. 因此当我们买入的是快要到期且处于平值状态的看涨期权时，我们进行 Γ 对冲成本将很低. 如果做到这一点，并且重新调整股票数量以达到想要的 Δ 对冲，则我们就同时完成了 Γ 对冲和 Δ 对冲.

注意当 $t \to T$ 时，Γ 图形变得陡峭或者更尖锐一些. 同时，如果 $S \neq X$，则有：

$$\lim_{t \to T} \Gamma(t) = 0$$



131~132

图 7-4　Γ 与股票价格

7.4.2　参数 Δ、Γ 和 Θ 的进一步分析

方程(7-6)给出了如下看涨期权的微分方程：

$$dC \approx \Theta dt + \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma(dS)^2 \tag{7-12}$$

在原先期权的基础上我们可以计算一个“新”的期权的价格. 看下面的例子：

我们令	可以得到
$S=43$	$C=5.56$(由 Black-Scholes)
$X=40$	$\Delta=0.825$
$\sigma=0.1414$	$\Gamma=0.143$
$r=0.05$	$\Theta=-3.0635$
$T=1$ 年	

3 周后，若股票价格 $S=44$，用近似公式(7-12)有：

$$C_{新} \approx C_{旧} + \Theta dt + \Delta dS + \frac{1}{2}\Gamma(dS)^2$$

这里 $dt=\frac{3}{52}$，且 $dS=44-43=1$.

因此

$$\begin{aligned} C_{新} &\approx 5.56+(-3.0635)\times\frac{3}{52}+0.825\times 1+\frac{1}{2}\times 0.143\times 1^2 \\ &=5.56+(-0.177)+0.825+0.0715 \\ &=6.28 \end{aligned}$$

如果我们直接用 Black-Scholes 计算 $C_{新}$，可以得到 6.276.

习题

1. 根据已知条件，计算 Δ、Γ 和 Θ.

	S_0	X	r	T	σ
(a)	50	55	0.05	6 个月	0.30
(b)	60	60	0.052	3 个月	0.33
(c)	80	70	0.055	4 个月	0.40
(d)	40	50	0.048	5 个月	0.35
(e)	30	25	0.05	2 个月	0.25
(f)	20	25	0.053	5 个月	0.38

2. 根据对练习中更新后的数据，采用课文中近似级数的方法，计算 $C_{新}$，并与 Black-Scholes 得到的 $C_{新}$ 进行比较. 133

	$S_{新}$	已过去时间
(a)	51	2 周
(b)	59	3 周
(c)	82	4 周
(d)	41.5	6 周
(e)	28.5	2 周
(f)	19	3 周

7.5　德尔塔对冲法则的推导

$$\frac{\partial V}{\partial S} = \Delta = N(d_1)$$

德尔塔对冲关系式的推导并不是显而易见的. 它看上去取决于一个似乎很神奇的约简，不过确实要做些神奇的变化. 我们首先列出看涨期权的定价公式(5-10)

$$V = SN(d_1) - e^{-rT}XN(d_2)$$

这里 d_1 和 d_2 都是关于 S 的函数，因此 $N(d)$ 的偏导数是 $N'(d)$ 和 $\frac{\partial d}{\partial S}$ 的乘积. 在第 6.5.1 节中我们知道：

$$N'(d) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d^2/2}$$

由导数的乘法法则：

$$\frac{\partial V}{\partial S} = N(d_1) + SN'(d_1)\frac{\partial d_1}{\partial S} - e^{-rT}XN'(d_2)\frac{\partial d_2}{\partial S}$$

方程(5-10)中包含关于 d_1 和 d_2 的公式，而

$$d_i = \frac{\ln S}{\sigma\sqrt{T}} + 常数$$

我们注意到 $\partial d/\partial S$ 等于 $1/S\sigma\sqrt{T}$，合并一些项后得到：

$$\frac{\partial V}{\partial S} = N(d_1) + [SN'(d_1) - e^{-rT}XN'(d_2)]/S\sigma\sqrt{T} \tag{7-13}$$

我们认为公式(7-13)中最后两项可以约简. 这看上去有些不可思议，但确实如此. 我们对 $N(d_2)$ 进行分析，在公式(5-10)中：

134

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

采用前面关于 $N'(d)$ 的公式，我们可以得到：

$$N'(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp[-(d_1 - \sigma\sqrt{T})^2/2]$$
$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d_1^2/2}e^{(2d_1\sigma\sqrt{T}-\sigma^2T)/2}$$

但由 d_1 的公式知：

$$d_1\sigma\sqrt{T} = \ln(S/X) + \sigma^2T/2 + rT$$

代入 $N'(d_2)$ 得到：

$$N'(d_2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-d_1^2/2}e^{\ln(S/X)+rT}$$
$$= N'(d_1)e^{rT}S/X$$

再返回公式(7-13)，有：

$$\frac{\partial V}{\partial S} = N(d_1) + [SN'(d_1) - e^{-rT}XN'(d_1)e^{rT}S/X]/S\sigma\sqrt{T}$$
$$= N(d_1)$$

7.6 购买股票后的德尔塔对冲

回顾最开始的例子中我们提到对 1 份看涨期权进行对冲，可以采用 Δ 股股票. 我们也可以反过来进行对冲，即我们也可以对 1 股股票进行对冲，采用的方

法是卖出 $1/\Delta$ 份看涨期权，Δ 由公式(7-8)给出.

那么制定这一类对冲的成本有多高呢？我们卖出看涨期权以对资产组合进行对冲时，可以有不同的选择，因为不同执行价格的期权价格不同．合理的选择当然是使我们的成本最低．接下来讨论如何选择执行价格 X，成本才最低.

任何时刻持有的资产的清算价格由下面公式给出：

$$H_t=(\text{看涨期权的份数})\times(\text{每份看涨期权的价格})$$

上式右边的两项我们都知道，因为：

$$\begin{aligned}\text{看涨期权的份数}&=1/\Delta\\&=1/N(d_1)\end{aligned}$$

采用看涨期权的价格公式(5-10)，我们可以得到 H_0 的值

$$\begin{aligned}H_0&=[S_0N(d_1)-\mathrm{e}^{-rT}XN(d_2)]/N(d_1)\\&=S_0-\mathrm{e}^{-rT}X\frac{N(d_2)}{N(d_1)}\end{aligned}$$ 135

这里的每一项都是正的．更进一步，当 X 变化时，$N(d_2)/N(d_1)$ 并不大幅变化．因此显然我们要使用来对冲的期权的值最小，则应选择较大的 X，也就是说，选择虚值期权.

这一点从图 7-5 可以验证．图中表示的是对 100 股股票、每股价格 100 美元的股票所需要的期权的对冲值．图 7-5 表明，实值期权时需要更多的对冲．随着执行价格的下跌，对冲的支出也稳步下降．在该例中，$\sigma=0.38$，$r=0.05$，到期时间是 1 年.

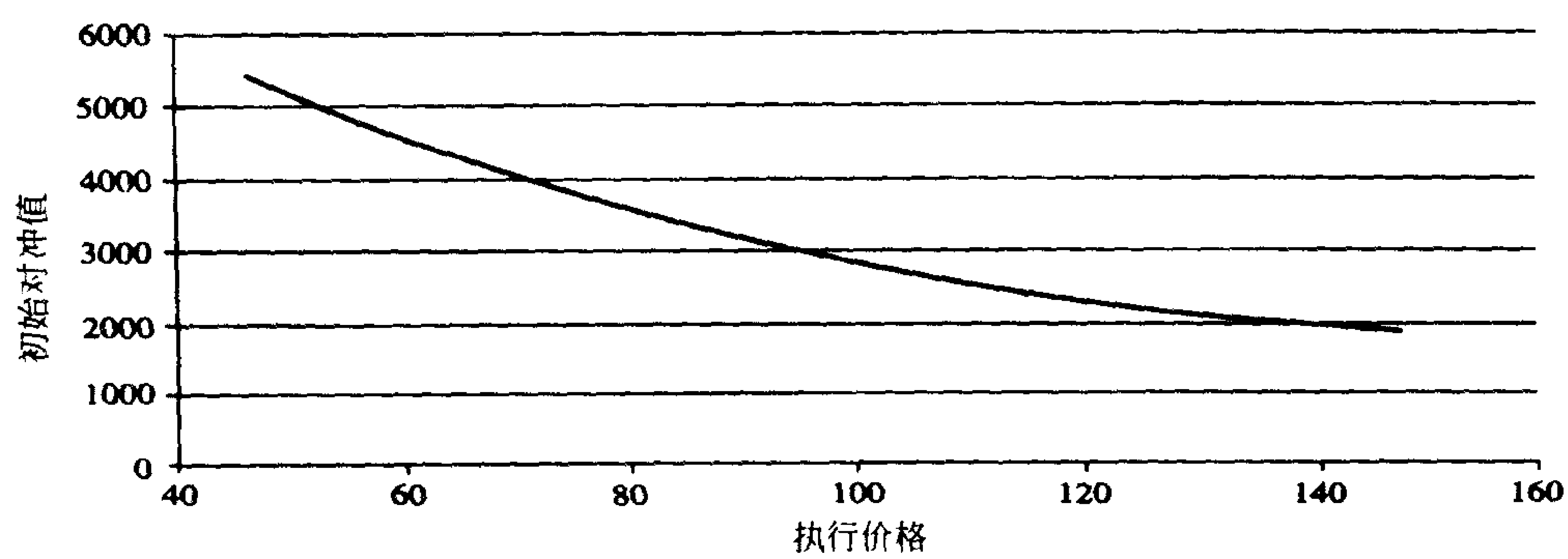


图 7-5　初始对冲值与执行价格

随着时间的推移，为了保持对冲状态，我们需要定期调整对冲值 H_t．对于瞬间的情形则需要连续调整.

由于股票价格高时，$\Delta=N(d_1)$ 和 Δ 都较大，且随着股价上升，Δ 和看涨期权的价格都上升．因此我们对冲股票需要的期权数量，$1/\Delta$，将随着看涨期权价格的上升而下降．这意味着我们在调整对冲时是朝着交易有利的方向在进行.

当期权的价格上升后，我们卖出了期权；当期权的价格下跌后，我们买入了期权.

显然在交易中我们一直处于赢钱状态. 事实上我们的赢利取决于我们拟对冲的股票价格的历史表现. 任何时刻，我们对冲交易的支出、交易的赢利再加上清
136 算价格 H_t，其期望值正好等于我们拟对冲的股票价格和.

第8章　债券模型和利率期权

史瑞尔酿酒厂的销售不断拓展时，总裁约翰逊被问起他认为他的这些财富的价值体现在哪里，他回答说："我们并不仅仅满足于卖出多少酒，我们关注的是财富增长的无限潜力."

——James Boswell

8.1　利率和远期利率

如果说货币是商品的话，那利率就是货币商品的成本. 货币(资本)支持着各种各样的农业和工业建设，如公路、学校、机场、医院、工厂、电信网络、能源企业、钢铁、实验室等. 一般情况下，这些资本都是借入的，这就引出了债券市场. 目前美国国内有许多种类的债券，如美国政府债券、公司债券(由公司发行)和市政债券(由城市、州、医院等发行). 而我们这里讨论的仅限于美国政府债券. 137

8.1.1　市场规模

美国股票市场的规模十分庞大. 其总价值或资本总额(capitalization)在1999年1月1日达到13万亿美元，日平均交易量为300亿美元. 与之相比，资本总额仅为5万亿美元的美国政府债券市场每天的交易量却达到2000亿美元. 为什么政府债券市场如此重要呢？初看来，债券市场似乎和上述商业方面并没有十分紧密的联系. 其实答案在于，市场(甚至是你愿意包括的所有商品)首先确定政府债券的价格，而其他所有债券的价格都是根据政府债券的价格来确定的. 如果你参观美林、大通、J. P. 摩根、花旗集团、比尔斯帝恩(Bear Stearns)或摩根斯坦利迪威特(Morgan Stanley Dean Witter)的交易室，你会发现政府债券负责人的办公桌总是在最中心，其他债券(公司债券、市政债券等)的办公桌则围绕着政府债券的桌台呈卫星状分布.

8.1.2　收益率曲线

收益率$Y(T)$是指T年到期的债券现在应支付的年利率，也就是时间区间$[0, T]$上的平均年利率. 对到期前不支付利息的债券来说，收益率由债券目前的价格和面值(到期价格)的比值求出. 如果$P(0, T)$表示该比值，则

$$P(0,T) = e^{-TY(T)} \tag{8-1}$$

如果写成算术形式，则为：

$$P(0,n) = [1 + Y(n)]^{-n}$$

其中n表示到期的年数.

美国政府债券的收益率曲线(每天发布于《华尔街日报》)列出了不同时间段内

的年利率. 图 8-1 为 1999 年 3 月 11 日的收益率曲线(摘自《华尔街日报》). 通过观察一天前、一周前和一个月前的收益率曲线的相对位置, 我们可以发现利率比一个月前的有所增长, 但比一周前的有所下跌. 具体来看, 在 1999 年 3 月 10 日那天, 三个月到期的债券年利率大约为 4.67; 一年到期的债券年利率约为 4.73; 而 30 年到期的债券年利率则为 5.567.

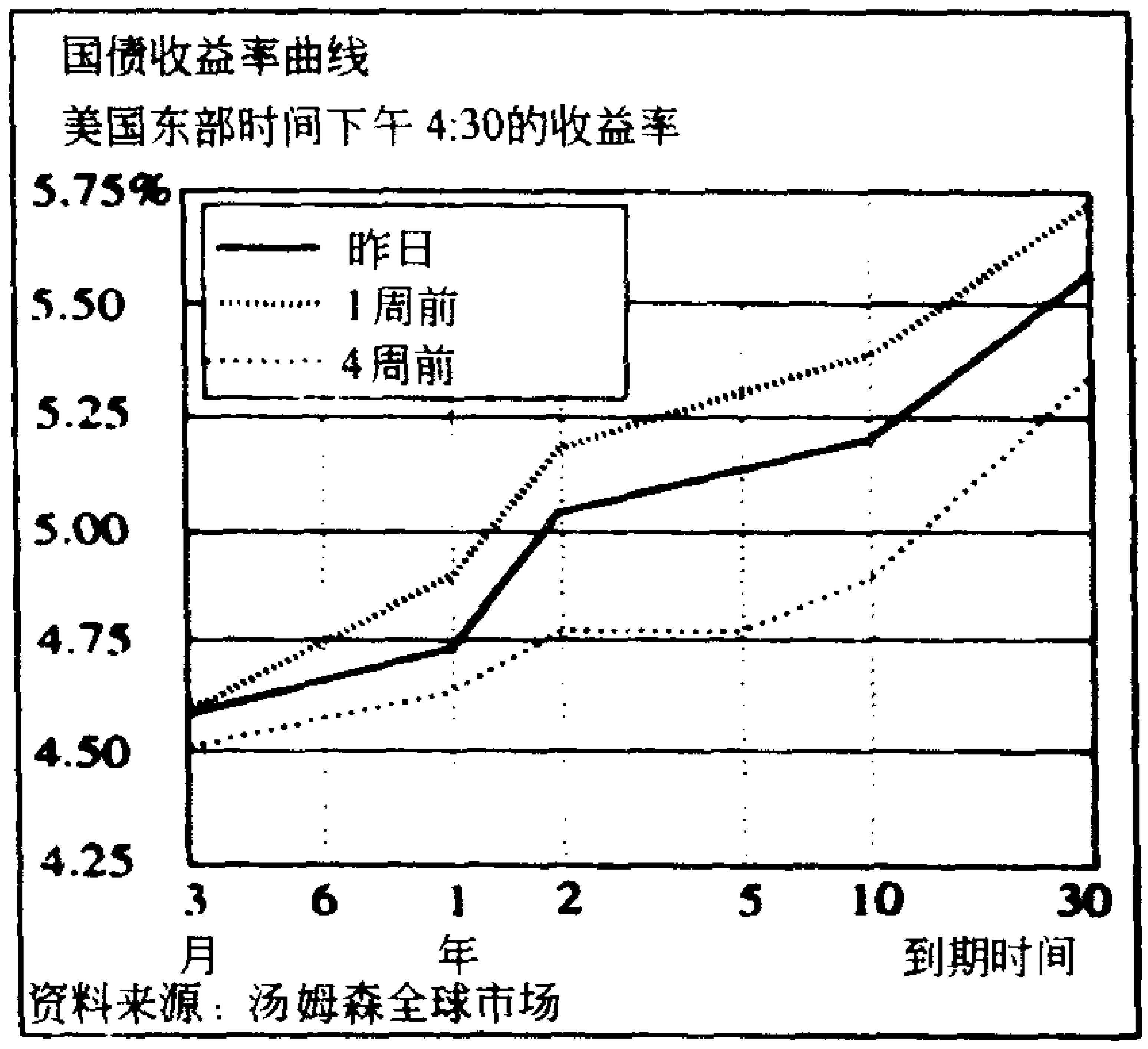


图 8-1 1999 年 3 月 11 日美国政府债券收益率曲线

(资料来源:《华尔街日报》, 1999 年 3 月 11 日)

许多因素(如通货膨胀、政治经济活动、经常项目的盈余或赤字、汇率等)都会决定或影响利率水平. 收益率曲线的形状是非常普通(非不正常)的, 其形状可以是递增也可以是递减, 可以是凹状也可以是凸状, 亦可以是碗状的.

8.1.3 如何确定收益率曲线

收益率曲线反映的是由市场决定的当前利率水平或货币成本. 在摩根斯坦利、比尔斯帝恩、大通和其他场所的债券做市商或者交易商都愿意买进或在买价基础上加一点手续费来卖出债券(通常他们同时既买又卖). 每天他们都谨慎地根据经济状况的变化调整债券的价格. 由这些交易者报出的价格部分是根据当天的货币供求确定的, 但是交易者的预期和对未来的预测同样起了关键的作用. 如果他们对市场的估计是正确的, 那么他们的公司就会获益, 他们也将会得到丰厚的回报. 如果他们对市场的判断是错误的, 他们的公司就会蒙受损失, 他们也将遭到解雇的威胁.

8.1.4 远期利率

让我们先回顾一下诸如石油这样的商品的远期价格. 买卖双方于 1999 年 4

月 1 日约定，他们将于 1999 年 9 月 15 日以每桶 15 美元的价格成交 1 万桶石油. 这样，他们就约定了一个石油的远期价格. 尽管利率是无法买卖的，我们仍然可以约定一个远期利率.

定义 令今天的时间 $t=0$. $f(0, t)$表示站在今天角度观测的 t 时刻($t>0$)的利率，则 $f(0, t)$称为远期利率.

债券市场根据收益率曲线决定$[0, t]$期间内收益或利率的值. 我们可以用据市场债券价格得到的收益率曲线来确定远期利率 $f(0, t)$，下面介绍具体的步骤.

$Y(t)$的表达式表示时间区间$[0, t]$上平均收益，而表达式

$$\frac{1}{t}\int_0^t f(0,s)\mathrm{d}s$$

同样表示该区间上的平均收益. 因此， 138~139

$$\int_0^t f(0,s)\mathrm{d}s = tY(t) \tag{8-2}$$

两边求导，可得

$$f(0,t) = Y(t) + tY'(t) \tag{8-3}$$

因此，我们可以利用收益率曲线来求远期利率.

由于收益率曲线往往只在一系列离散的点上有定义，因此在实际操作中，还需采用其他手段来从 Y 求得 $f(0, t)$. 具体做法将在稍后加以详述.

8.2 零息券

一般说来，债券都是带有息票的. 但如果考虑息票的话，问题将变得十分复杂，因此，我们讨论的债券是不带息票的，称为**零息券**(zero-coupon bond, ZCB). 零息券是指当前以一固定的价格买入债券，到期后(期限为 T)可以赎回 1 美元. 随之而来的问题便是，当前债券公平合理的价格是多少呢? 在利率不波动且短期利率为 r 的情况下，很明显

$$P_0 = \mathrm{e}^{-rT} \tag{8-4}$$

在该情形下，有:

$$P(t) = \mathrm{e}^{-r(T-t)} \tag{8-5}$$

其中，$P(t)$表示 t 时刻债券的价格.

假设短期利率 $r(t)$是可变但可确定的. $r(t)$表示 t 时刻当期的利率，称为**短期利率**(short rate). 则:

$$P(t) = \exp\left[-\int_t^T r(s)\mathrm{d}s\right] \tag{8-6}$$

投资者和金融分析师们很容易就可得到零息券的价格. 我们也不难从零息券的价格反过来求得即期利率，公式 8-6 可以改写成:

$$\int_t^T r(s)\mathrm{d}s = -\ln P(t) \tag{8-7}$$

两边对 t 求导，得

$$r(t)=\frac{\mathrm{d}\ln P(t)}{\mathrm{d}t}$$

可以注意到在利率可确定的情况下，$r(t)$和 $P(t)$是互相联系的.

8.2.1 远期利率和零息券

我们进一步假设利率是不可确定的，这也是现实世界中的情况，因此，下面的讨论就显得非常重要. 弄清即期利率与远期利率之间的差别是本节的关键.

让我们从将公式(8-1)和(8-2)合并开始，得到：

$$\begin{aligned}P(0,T)&=\exp[-TY(T)]\\&=\exp\left[-\int_0^T f(0,s)\mathrm{d}s\right]\end{aligned}\tag{8-8}$$

注意 $P(0,\ T)$为目前债券的价格，而 $f(0,\ s)$是当前看来 s 时刻的远期利率. 让我们先直观的解释一下公式(8-8)中所表示的利率和债券价格之间的关系.

把$[0,\ T]$分割成小的时间区间$[t_k,\ t_{k+1}]$，见图 8-2，且令 $\Delta t_k=t_{k+1}-t_k$. 假设远期利率 $f(0,\ t_k)$在第 k 个时间间隔内保持不变. 我们在每个区间上都约定一远期合约. 在 0 时刻投资 1 美元，并在该时间段结束时把累积收益作为下一个时间段的初始投资，如此循环下去，则 1 美元在 T 时刻的价值 V 便可由下式表示：

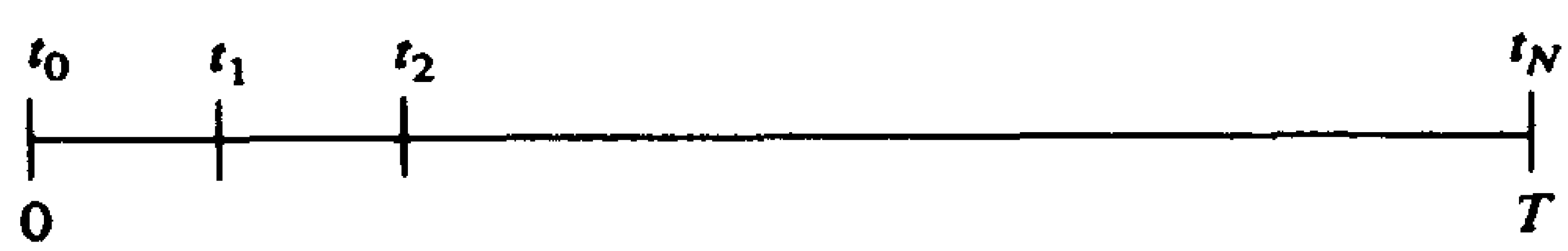


图 8-2　时间 T 的区间分割图

$$\begin{aligned}V&=1\mathrm{e}^{f(0,t_1)\Delta t_1}\mathrm{e}^{f(0,t_2)\Delta t_2}\cdots\mathrm{e}^{f(0,t_N)\Delta t_N}\\&=\exp\left[\sum_{k=1}^{N}f(0,t_k)\Delta t_k\right]\end{aligned}$$

对于很小的 Δt_k，上面的表达式可看成

$$\exp\left[\int_0^T f(0,s)\mathrm{d}s\right]$$

由于：

$$V=\exp\left[\int_0^T f(0,s)\mathrm{d}s\right]$$

所以

$$P(0,T)=V^{-1}=\exp\left[-\int_0^T f(0,s)\mathrm{d}s\right]\tag{8-9}$$

注意公式(8-9)已经考虑了现实世界的各种变量和数字. 如果现实世界中这个等式不成立，那么套利就会发生，并导致债券价格发生变化，使之符合这一等式.

对公式(8-9)两边取对数并对 T 求导，则可得：

$$f(0,T)=-\frac{\mathrm{d}\ln P(0,T)}{\mathrm{d}T} \tag{8-10}$$ 140~141

将式(8-9)写成更一般的形式，我们很容易得到

$$P(t,T)=\exp\left[-\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s\right] \tag{8-11}$$

$P(t,T)$表示在 t 时刻到期时间为 T 的零息券的价格．$f(t,s)$表示在 t 时刻的约定时刻 s 的远期利率．这些和 $t=0$ 的情况是相一致的．

我们还可以采用微分的方法得出公式(8-11)，由于：

$$P(t,T+\Delta T)\approx P(t,T)\mathrm{e}^{-f(t,T_1)\Delta T}$$

这里 $T\leqslant T_1\leqslant T+\Delta T$(来自中值理论)，因此：

$$f(t,T_1)\Delta T=-\ln\left(\frac{P(t,T+\Delta T)}{P(t,T)}\right)$$

从而：

$$f(t,T_1)=-\frac{\ln P(t,T+\Delta T)-\ln P(t,T)}{\Delta T}$$

当 $\Delta T\to 0$ 时，得

$$f(t,T)=-\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}$$

8.2.2 基于 $Y(t)$ 或 $P(t)$ 的计算

事实上，在实际操作中，根据 Y 或 P 来确定 $f(0,t)$比上述的推导来得复杂得多．$Y(t)$和 $P(t)$的函数只是确定了很小的时间段上的值．假设已知各点 t_1，t_2，…，t_n 上 Y 和 P 的值．

对于间断点上定义的函数并不能求导．我们可以以直线连接各点使函数在整个区间上都有定义，但这样得到的函数图像是不光滑的．我们要求得的应该是更为光滑的函数曲线．为了达到这一目的常用的方法是三次曲线逼近．Excel、Maple 和 Mathematica 中的相关程序包可以帮助我们找到三次曲线逼近函数．下面将介绍具体的步骤．

例 政府债券在某一特定日期的收益率曲线由表 8-1 给出

1. 求 $Y(t)$的三次曲线逼近函数
2. 通过 $Y(t)$找出 $f(0,t)$

解 第(1)步启动 Maple 程序后，键入

```
>readlib(spline);
```

这条指令用于生成一链接曲线．之后，键入到期的时间并为其取一名称．

```
>maturity: =[.25,.5,1,2,5,10,30]:
```
142

表 8-1 收益率曲线

时间	$Y(t)$(百分数)
3 个月	4.6
6 个月	4.70
1 年	4.75
2 年	5.0
5 年	5.1
10 年	5.2
30 年	5.55

现在，当我们引用 maturity 时，系统会自动调用这一时间序列．同时，我们还需要使用到收益率，因此，再键入

```
>percents: =[4.6, 4.7, 4.75, 5, 5.1, 5.2, 5.55];
```

为了通过这些点求得一曲线，需键入

```
>Yield: =spline(maturity, percents, cubic);
```

注意最后一条指令末尾的分号，其作用是让 Maple 显示结果．我们将看到

$$\text{Yield} = \begin{cases} 4.5 + 0.283t + 0.703t^2 - 0.938t^3 & t < 0.5 \\ 4.3 + 1.49t - 1.72t^2 + 0.676t^3 & t < 1 \\ 5.12 - 0.972t + 0.748t^2 - 0.146t^3 & t < 2 \\ 3.82 + 0.982t - 0.229t^2 - 0.0167t^3 & t < 5 \\ 6.12 - 0.397t + 0.047t^2 - 0.00165t^3 & t < 10 \\ 4.43 + 0.109t - 0.00357t^2 + 0.0000397t^3 & \text{其他情形} \end{cases}$$

每一个多项式都是式子右边所列时间段上的三次曲线函数表达式．比如，第二行便是$0.5<t<1$ 时的相应的多项表达式．至此，我们已经完成了求解的第一步．

第(2)步为求得远期利率 $f(0, t)$，我们要用到公式(8-3)：

$$f = Y + tY'$$

我们可以利用 Maple 来分步计算出这一表达式．首先，为了计算收益率的导数 Y'，需键入：

```
>Slope: =diff(Yield, [t]);
```

这里，我们把 Y'记为 Slope．Maple 将像第(1)步中所述那样列出一系列多项式．每一条曲线都有收益率函数的导数．

最后，我们只要将每一个 Y'的多项式乘以 t 再加上 Y 的多项式即可．尽管我们可以命令 Maple 完成这一指令，但没有直接的函数．我们可以键入：

```
>forward=Yield+t*Slope;
```

但是这样显示的仅仅是两项各自独立的结果．为了得到最后两项结合的结果，可以键入

143
```
>simplify(forward);
```

如果最后的数值小数位不多，那么这种方法可以奏效．然而，在这里我们推荐另一

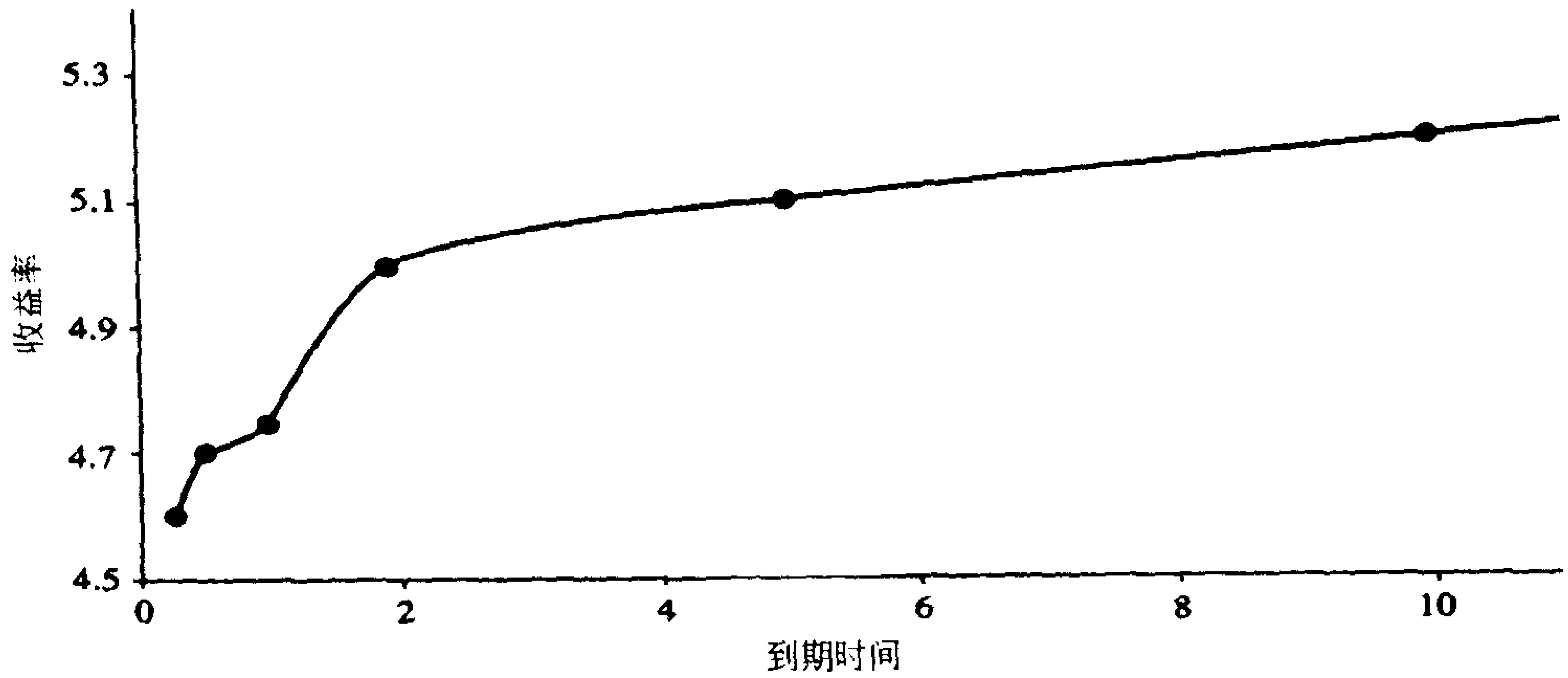


图 8-3 由收益率曲线求得的三次曲线逼近函数

种方法：每行单独求解，输出最后结果时可用下列表达式：

第 1 行收益率+(第 1 行斜率)

这样可以省去不必要的麻烦．最终获得的结果是：

$$\text{forward} = \begin{cases} 4.5 + 0.566t + 2.11t^2 - 3.75t^3 & t < 0.5 \\ 4.3 + 2.98t - 5.16t^2 + 2.71t^3 & t < 1 \\ 5.12 - 1.94t + 2.25t^2 - 0.584t^3 & t < 2 \\ 3.82 + 1.96t - 0.687t^2 + 0.0668t^3 & t < 5 \\ 6.12 - 0.794t + 0.141t^2 - 0.00165t^3 & t < 10 \\ 4.43 + 0.218t - 0.0107t^2 + 0.000159t^3 & \text{其他情形} \end{cases}$$

8.3 互换

让我们先来看一个例子．现有两家公司：慢稳公司(Slow and Steady, Inc., SSI)和快速有线电视公司(Flash Cash and Trash Cablevision, FCT)两家公司都希望借入 1 千万美元．他们可以获得的利率如图 8-4 所示．

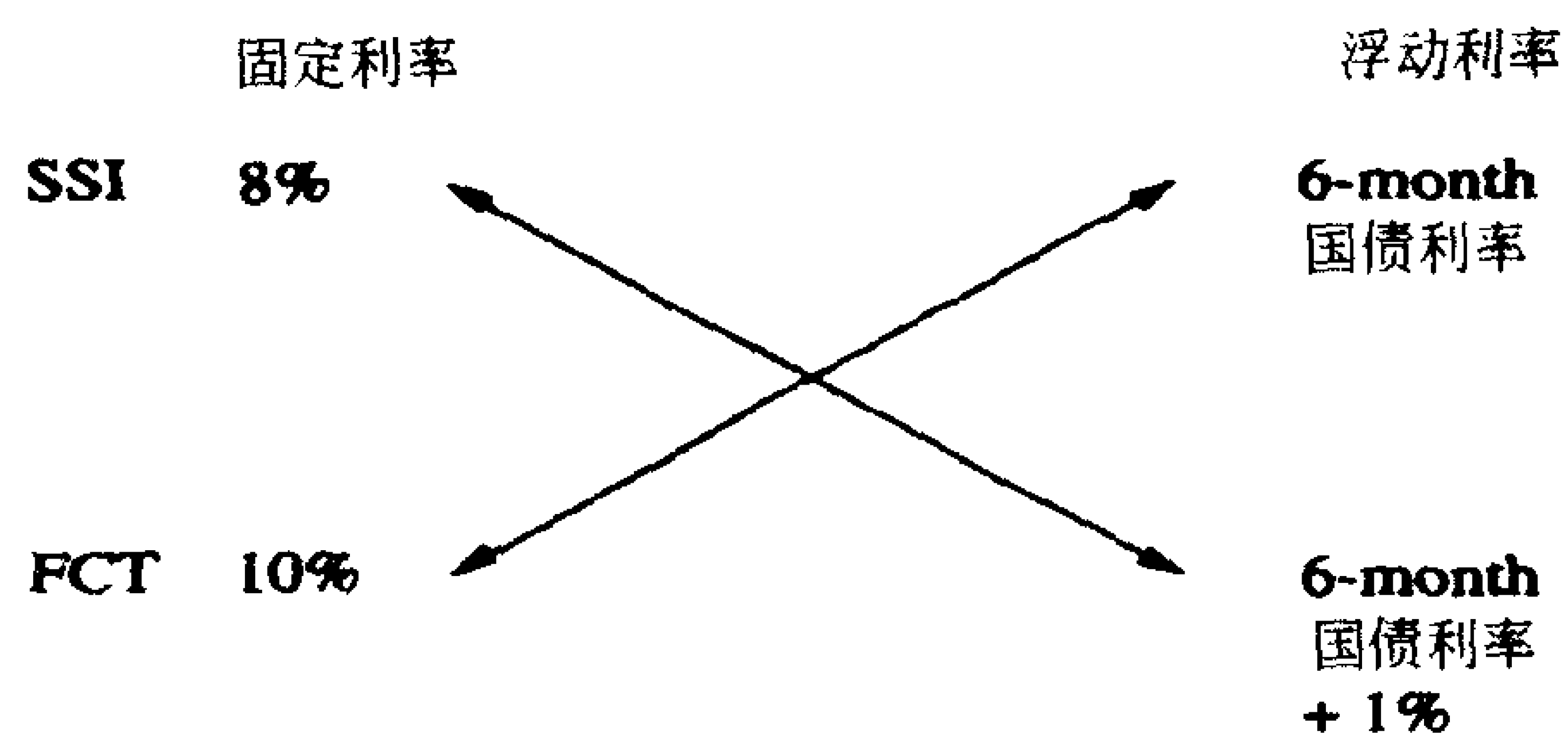


图 8-4 互换的条件

144

SSI 希望以浮动利率借款，而 FCT 则希望以固定利率借款．他们发现：

FCT 可获得的固定利率加上 SSI 可获得的浮动利率总共为 $10\%+T$

FCT 可获得的浮动利率加上 SSI 可获得的固定利率总共为 $9\%+T$

因此，在图 8-4 中的↗和↘两种方向上就存在一定可以被利用的差额．因此，和借款目的恰恰相反，SSI 在实际借款时并不会以浮动利率而是以固定利率借款，FCT 也不是以固定利率而是以浮动利率借款，然后他们之间再进行互换．更准确地说，SSI 向 FCT 支付浮动利率而 FCT 则向 SSI 支付固定利率，然后他们各自再向银行付清借款利息．

这里惟一需要确定的是 SSI 和 FCT 之间的利率支付．让我们先来看一个更为简单的例子．

Andy 和 Betty 分别在不同的市场买东西．不同市场的价格如下：

	苹果	桔子
Andy 的市场购买价	10	15
Betty 的市场购买价	15	10

Andy 喜欢桔子而 Betty 喜欢苹果．因此，Andy 可以在自己的市场买苹果而 Betty 则在自己的市场买桔子，然后他们互相交换，这样他们便可各得其所．

这个例子之所以简单是因为两边的数字是对称的．让我们再来看另一个例子，假设市场价格调整至如下

	苹果	桔子
A	10	15
B	11	13

很明显，Andy 仍应该在他的市场买苹果，Betty 也仍应在她的市场买桔子，之后他们将会互相交换．但他们交换的价格应该是多少呢？

1. **友好方案**：A 以 13 美分一个桔子支付 B；B 以 10 美分一个苹果支付 A．这样，A 每买一个桔子可以节省 2 美分，B 每买一个苹果可以节省 1 美分．

2. **算术平均方案**：一个苹果和一个桔子的成本总和 $=10+13=23$．假设 Andy 每买一个桔子支付 $15-x$；Betty 每买一个苹果支付 $11-x$，那么

$$(15-x)+(11-x)=26-2x=23$$

145 解得 $x=1\frac{1}{2}$

于是，A 以每个桔子 13.5 美分支付给 B，B 以每个苹果 9.5 美分支付给 A．这样，A 和 B 两人各能节省 0.5 美分．

3. **几何平均方案**：设 A 每买一个桔子支付 $15R$，B 每买一个苹果支付 $11R$，那么

$$15R+11R=26R=23$$

解得 $R=\frac{23}{26}$.

这样的话，两个人可以获得相同的百分比折扣. 于是，A 每个桔子支付 $15\times\frac{23}{26}=13.27$. B 每个苹果支付 $11\times\frac{23}{26}=9.73$.

表 8-2 总结了上述三种方案. 当然，还可能有其他的分配方案，对于这个问题是没有标准答案的. 我们讨论金融互换时，还会遇到其他更复杂的因素.

让我们回过头来看 SSI 和 FCT 的例子. 他们又将以什么价格互相支付呢?

注意，图 8-4 中的↗和↘两种方向上的差额为 $(0.10+T)-(0.09+T)=0.01=1\%$. 假设 SSI 和 FCT 同意将这 0.01 的差额平分，也就是说，他们通过互换各能节省 0.005.

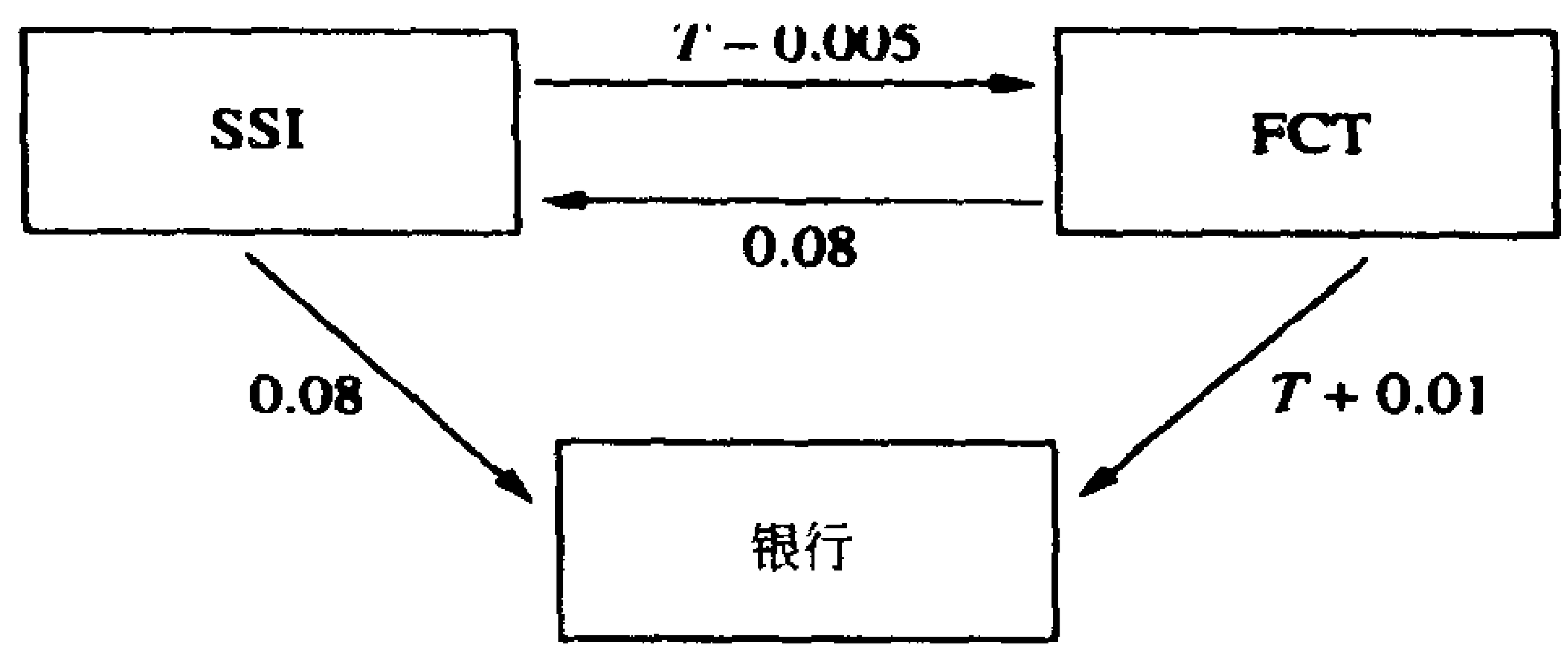


图 8-5 互换交易

要达到这一目的有许多种方法. 图 8-5 列出了其中一种方案. 因为 SSI 可以比"标准"利率节省 0.005，我们假设 SSI 支付给 FCT 的利率为 $(T-0.005)$. FCT 支付给 SSI 的利率为 0.08，这也正好是 SSI 应当支付给银行的固定利率. 因此，SSI 支付的六个月净利率为：

$$0.08-0.08+(T-0.005)=T-0.005$$

那 FCT 支付的利率又为多少呢? FCT 支付的六个月净利率为：

$$0.08+(T+0.01)-(T-0.005)=0.095 \tag{8-12}$$

这恰好是我们所预期的利率. FCT 应支付的利率：

$$0.10-0.005=0.095$$

这样，FCT 可以通过互换比固定利率节省 0.005.

表 8-2 互换的结果

		成本		节省	
		苹果	桔子	苹果	桔子
1	A		13		2
	B	10		1	
2	A		13½		1½
	B	9½		1½	
3	A		13.27		1.73
	B	9.73		1.27	

8.3.1 简单的互换方法

上述支付方法虽然可以达到目的，但两家公司间的支票互相转账会大大影响效率. 我们可以寻找一种更为简单的方法：只要由 SSI 支付给 FCT 就能解决所有的问题. 假设 SSI 每六个月支付给 FCT 的利率为 $T+X$.

那么，SSI 总共支付的利率为

$$(T+X)+0.08$$

这个数字必须符合 SSI 对利率的要求，则

$$T+X+0.08=T-0.005$$

求得 $X=-0.0085$，因此，SSI 每六个月支付给 FCT$(T-0.085)$. 由于这个数字是负数的可能性较大，所以我们可以说，FCT 每六个月支付给 SSI$(0.085-T)$. 对 SSI 来说，所有的要求都已经满足，那么 FCT 这边又如何呢？FCT 现在所应支付的利率为

$$(0.085-T)+(T+0.01)=0.095$$

这与 FCT 对利率的要求也相符合. 因此，只需由 FCT 向 SSI 支付就可以解决问题，如图 8-6 所示.

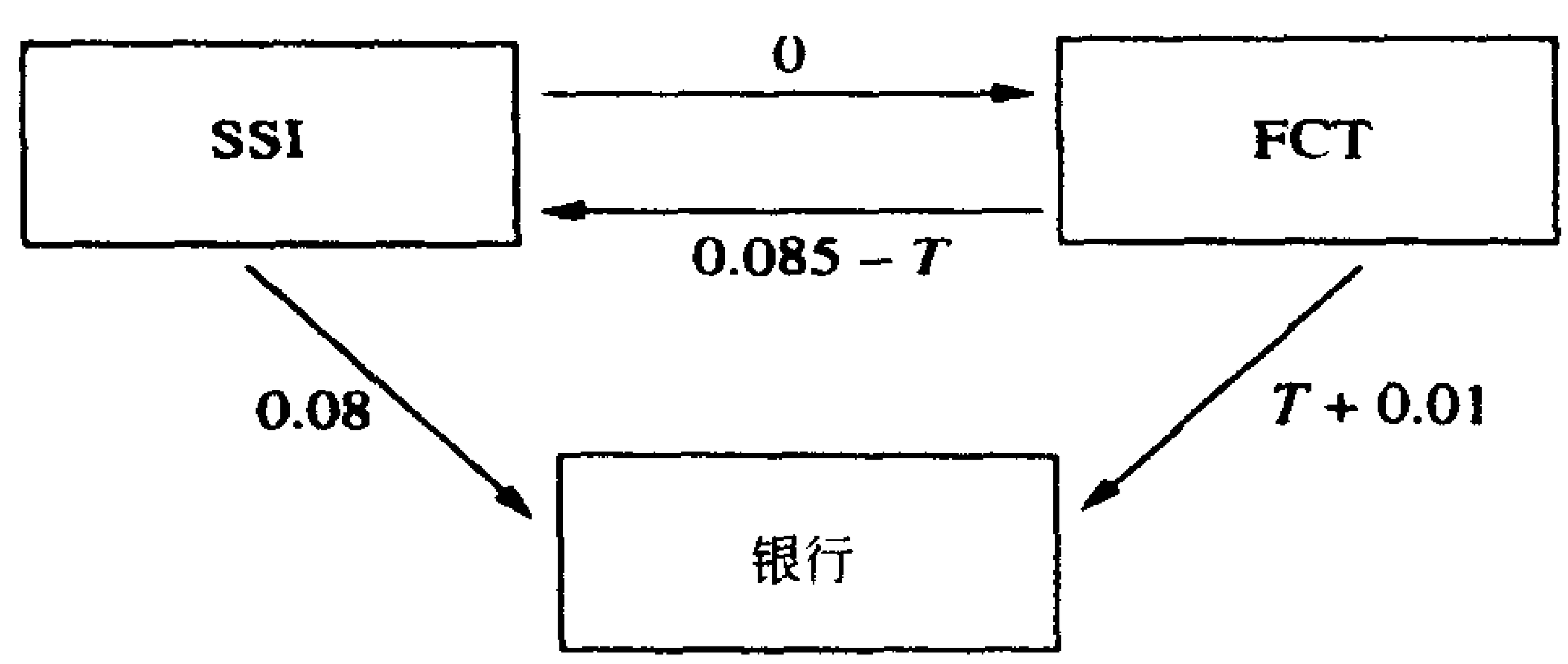


图 8-6 双方间仅有一笔支付的互换

146~147 或许还有一种最为简单的方法. SSI 以 0.08 的利率向银行借款，由 FCT 来支付这 0.08 的利率. 同样，FCT 以 $T+0.01$ 向银行借款，由 SSI 来支付. 最后，为了达到各节省 0.005 的目的，再由 FCT 向 SSI 支付 0.015，该过程如图8-7所示.

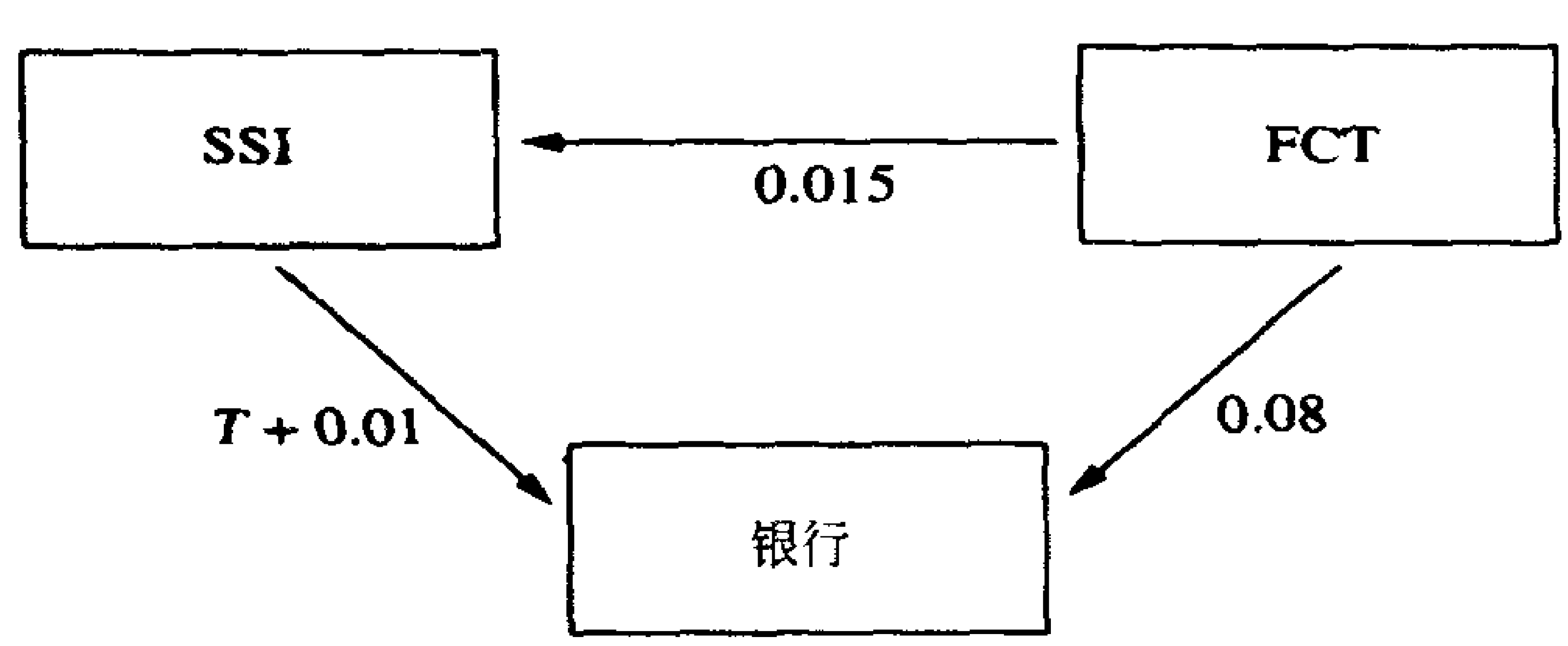


图 8-7 最简单的互换方案

从图中可以看出，双方都满足了自己的要求.

8.3.2 互换的实际情形

很明显，SSI 的信用等级比 FCT 高. 如果 SSI 参与互换的话，就意味着他承担了附加的风险. FCT 很可能会不履行付款责任. 在这种情况下，SSI 有可能希望因附加的风险得到额外的补偿. 世界上没有免费的午餐，因此，SSI 很可能会要求将 0.01 的差额分成 0.007 和 0.003，而不是之前的双方各占 0.005. 在这种情况下：

	利率
SSI	$T-0.007$
FCT	0.097

所以，两家公司会就利率进行磋商. 如果他们不能达成一致，那么利率互换将不能进行. 由于 SSI 并不想扮演银行的角色也不愿意承担额外的风险，更为可能的情况便是，两家公司都通过经纪商来寻求互换.

习题

1. 假设利率是保持不变的. 在这种情况下 T 时刻到期的零息券的价格为

$$P(t,T)=\exp[-R(T-t)]$$

其中，R 为假设不变的利率. 利用公式(8-10)证明 $f(t,\ T)=R$.

2. 远期利率由表达式 $f(0,\ T)=0.05+0.01T$ 给出，其中，T 为年数. 利用给出的表达式求出到期日为如下的零息券的价格.

(a)1 年

(b)2 年

(c)5 年

(d)10 年

(e)30 年

3. 假设远期利率曲线表达式变为

$$f(0,T)=0.05+0.01\mathrm{e}^{-T}$$

利用新的表达式求第 2 题中各零息券的价格. 148

4. Andy 经常光顾的杂货店被 Supersnap.com 收购，下表列出了新的价格

	苹果	桔子
Andy	8	12
Betty	11	11

Andy 和 Betty 约定，由 Andy 买苹果，Betty 买桔子，然后他们互换. 在下

列各种方案下，他们彼此间的支付为多少？

(a)友好方案

(b)算术平均方案

(c)几何平均方案

8.3.3 债券价格模型

为什么我们要建立债券模型或债券定价模型呢？让我们先来看看互换带来的启示. 一般情况下，两家公司不会自发地友好合作，完成互换交易. 事实上，有许多诸如金融机构、银行、经纪行已经把买卖互换作为一项业务. 像 SSI 这样的公司会通过协商来完成浮动利率到固定利率或者相反方向的互换.

让我们来看一个出售互换的公司. 假设他们希望用浮动利率来交换固定利率. 如果他们想要给互换定价并成功地完成互换，他们必须能准确地预测或评估未来的利率水平.

更简单地说，当银行、保险公司或是私人投资者购买了 30 年到期的美国政府债券时，他们就是在预测未来 30 年内利率的走势，或者说，在利率上下赌注. 更为重要的是，收益率曲线任何一部分上的变动都会影响曲线的其他部分. 要弄清债券的价格机制，必须牢记这一点.

给债券定价是至关重要的工作. 任何差错都是要付出巨大代价的，因此，债券经纪交易商们会不顾一切寻求他们所要的帮助.

正如 8.2 节中所述，债券价格、收益率曲线和远期利率是相互关联的. 所以，只要构建其中一个的模型，很容易就可以求得其余两个.

零息券的远期价格

在 8.2 节中我们已经讨论了零息券的价格 P.

$P(0, T)$表示 T 时刻到期支付 1 美元的零息券目前($t=0$ 时)的价格，则 $P(t, T)$定义为 T 时刻到期支付 1 美元的零息券在 t 时刻的价格. 这里我们将对此做进一步的讨论.

定义 定义 $P_0(t_1, T)$为 t_1 时刻发行，T 时刻到期支付 1 美元的零息券目前的价格. 我们可以把它看作一个远期合约：一方同意在 t_1 时刻以 $P_0(t_1, T)$支付

149 给对方，作为交换，对方则在 t_1 时刻交付债券.

我们还可以进一步定义 $P_{t_1}(t_2, T)$. 不过，暂时我们对此不做考虑.

第一个想法可能是要确定 $P_0(t_1, T)$的价格似乎不太可能，因为这好象需要对未来做出精确的预测. 不过接下来的分析会给你带来一些意外.

从报纸或网站上公布的收益率曲线我们可以得知 $P(0, t)$，其中 $0 \leqslant t \leqslant T$.

定理

$$P_0(t_1, T) = P(0, T)/P(0, t_1) \tag{8-13}$$

证明(套利法) 我们将给出具体的证明. 需要指出的是 $P_0(t_1, T)$并不仅仅只是

讨论我们讨论出来的结果或者是我们的直觉，它必须等于 $P(0, T)/P(0, t_1)$. 如果价格与该值背离的话，就会引致瞬间的套利，这将带来短暂的损失和最终的盈利．为方便起见，我们将在需要的时候讨论债券和它的价格.

具体证明　令 $\alpha=P(0, t_1)$，且 $\beta=P_0(t_1, T)$. 在 $t=0$ 时我们购入 β 单位 t_1 时刻到期的零息券[购入 β 单位 $P(0, t_1)$]，β 单位 $P(0, t_1)$ 的成本为 $\alpha\beta$.

在到期日 t_1，我们卖出债券可以获得 β 美元．我们再用这 β 美元购买 1 单位 $P_0(t_1, T)$(我们在 $t=0$ 时已经和对方约定好这一交易)．我们持有 $P_0(t_1, T)$ 直至到期日 T，并获得 1 美元．可以发现，我们在 $t=0$ 时支付 $\alpha\beta$ 美元，在 T 时获得 1 美元．当然，我们也可以在 $t=0$ 时购买零息券 $P(0, T)$．因此，

$$\alpha\beta = P(0,T) \tag{8-14}$$

如果 $\alpha\beta \neq P(0, T)$，那么人们将可以从套利中获得无穷多的利润，8.3.4 节中将有具体论述．由公式(8-14)，可得等式

$$P(0,t_1)P_0(t_1,T) = P(0,T)$$

所以

$$P_0(t_1,T) = P(0,T)/P(0,t_1)$$

总结　零息券的远期价格 $P_0(t_1, T)$ 可由远期利率、收益率曲线或零息券目前的价格决定.

8.3.4 套利

在上面已经提到如果：

$$P(0,T) \neq \alpha\beta \tag{8-15}$$

则存在套利机会．具体情况如下：

情况 1：$\alpha\beta < P(0, T)$

在这种情况下，买入 β 单位的 $P(0, t_1)$，并约定买入一远期合约 $P_0(t_1, T)$．同时，卖出 $P(0, T)$，差额 $P(0, T)-\alpha\beta$ 将是赚得的利润．接着往下证明，在 T 时刻，我们能以获得的 1 美元支付应付的 1 美元，这样整个交易就完成了.　150

情况 2：$\alpha\beta > P(0, T)$

在这种情况下，卖出 β 单位的 $P(0, t_1)$ 获得 $\alpha\beta$，同时卖出远期合约 $P_0(t_1, T)$．用获得的 $\alpha\beta$ 中的部分金额 $P(0, T)$ 购买零息券 $P(0, T)$，$\alpha\beta$ 和 $P(0, T)$ 之间的差额 $\alpha\beta-P(0, T)$ 将是赚得的利润.

到 T 时刻，我们能由 $P_0(t_1, T)$ 获得 β 美元，并将这 β 美元支付给 $P(0, T)$ 的持有者，完成交易.

通过两种情况的分析可以发现，套利者可以获得[$P(0, T)-\alpha\beta$]的利润．由于在 $t=0$ 时还可以将获得的利润再投资，因此，T 时刻获得的利润可能远远大于[$P(0, T)-\alpha\beta$].

例 根据收益率曲线，一年期的收益为 4.7%，五年期的收益为 5.10%．求零息券的远期价格 $P_0(1, 5)$．

解 从收益率曲线可求得

$$P(0,1) = e^{-0.047}$$

和

$$P(0,5) = e^{-0.051\times 5} = e^{-0.755}$$

所以

$$P(1,5) = P(0,5)/P(0,1) = e^{-0.255} = e^{-0.755}/e^{-0.047} = 0.8122$$

习题

表 8-3 和图 8-8 是 1999 年 7 月 1 日《华尔街日报》信用市场专栏中列出的收益率曲线：

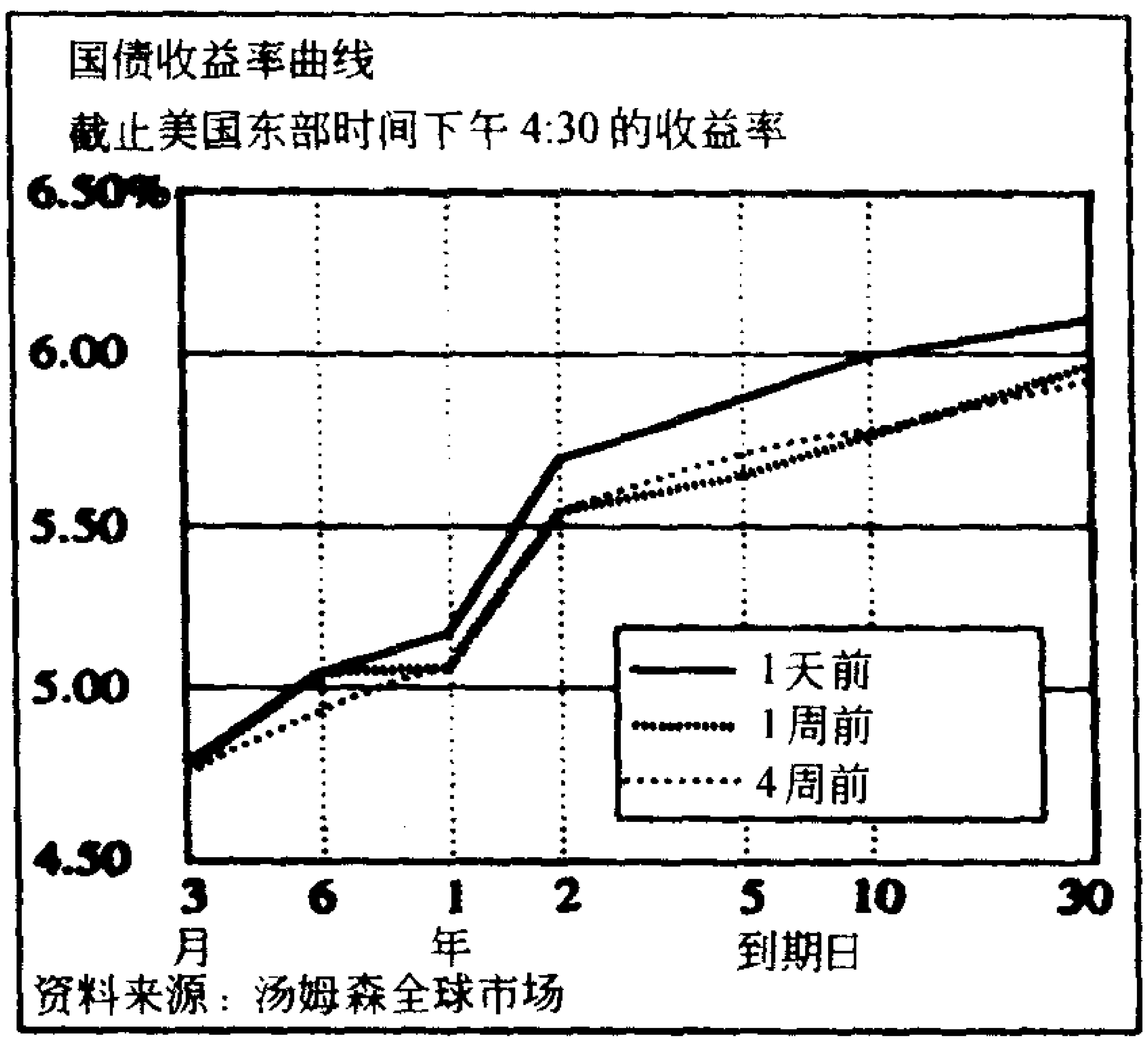


图 8-8 1999 年 7 月 1 日债券收益率曲线

表 8-3 1999 年 6 月 30 日国债收益率曲线

时间	分析所得的利率(百分比)
3 个月	4.75
6 个月	5.04
1 年	5.07
2 年	5.52
5 年	5.66
10 年	5.78
30 年	5.97

利用上述数据求出下列零息券远期价格. 时间以年计算.

1. $P_0\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$注意：$\frac{1}{4}$年=3个月

2. $P_0(1, 2)$

3. $P_0(1, 5)$

4. $P_0(2, 5)$

5. $P_0(5, 30)$

6. $P_0(5, 10)$

7. $P_0(1, 10)$

8. $P_0(1, 30)$

9. $P_0(1.5, 2)$

10. $P_0(10, 30)$

11. $P_0\left(\frac{1}{2}, 1\right)$

12. $P_0(2, 30)$

8.4 互换的定价与对冲

一般情况下，公司总是向银行或投资机构购买互换合约. 假设一家公司有一笔浮动利率的贷款，它可以参与一互换合约，将浮动利率换成固定利率. 银行作为合约的另一方则获得固定利率并支付浮动利率. 银行希望给互换定以合理的价格，从而保护自己不会因为不可预计的未来利率而蒙受损失. 那银行具体该如何做到这一点呢?

银行同意下列条件：

1. 总时间期限为$[0, T]$. 本金为B_0.

2. 银行将在时刻$t_1, t_2, \cdots, t_N$支付，每段时间区间长度相同($t_{k+1}-t_k=\tau$)，$t_0=0$，$t_N=T$.

3. $[t_k, t_{k+1}]$上的利率为R_k，该利率由t_k时刻决定，且在$t=0$时是未知的.

4. $[t_k, t_{k+1}]$上应支付的利息为$B_0\tau R_k$，且在期末支付，即t_{k+1}时刻支付.

有两点需要补充说明：

1. 通常我们习惯使用几何利率来讨论问题. 因此，上述第4条中应支付的利息为

$$B_0(e^{R_k\tau}-1)$$

然而，使用算术利率公式会大大简化问题. 我们将先使用算术利率公式讨论，然后再使用几何利率.

2. 初看来，银行似乎会因为未来利率的变动而遭受损失. 但有一个方法可以使银行保护自己，避免损失.

8.4.1 算术利率

银行的战略

让我们关注时间区间$[t_k, t_{k+1}]$. 现在也就是 $t=0$ 时，我们并不知道 R_k. 银行买入 B_0 的贴现债券 $P(0, t_k)$并售出 B_0 的贴现债券 $P(0, t_{k+1})$. $t=0$ 时头寸成本为

$$B_0[P(0,t_k)-P(0,t_{k+1})] \tag{8-16}$$

在 $t=t_k$ 时，银行由债券 $P(0, t_k)$到期获得 1 美元，并购回债券 $P(0, t_{k+1})$，此时应支付的该债券的价格为$(1+R_k\tau)^{-1}$. 因此，银行的净头寸为

$$B_0[1-(1+R_k\tau)^{-1}] = B_0[R_k\tau/(1+R_k\tau)] \tag{8-17}$$

银行在$[t_k, t_{k+1}]$上以 R_k 投资这些金额. 在 $t=t_{k+1}$时，头寸价值变为

$$B_0[R_k\tau/(1+R_k\tau)](1+R_k\tau) = B_0R_k\tau \tag{8-18}$$

注意到，这个值恰好是 t_{k+1}时刻以浮动利率所应支付的$[t_k, t_{k+1}]$间的利息. 如果银行在每个$[t_k, t_{k+1}]$上都重复买入 $B_0P(0, t_k)$和卖出 $B_0P(0, t_{k+1})$的步骤，那么 $t=0$ 时的成本为

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N-1} B_0[P(0,t_k)-P(0,t_{k+1})] &= B_0[P(0,0)-P(0,t_N)] \\ &= B_0[1-P(0,T)]\end{aligned} \tag{8-19}$$

银行在每个 $t_{k+1}(k=0, 1, \cdots, N-1)$时都能获得 $B_0r\tau$ 的回报，其中 r 仍待确定.

这些支付都应当贴现，因此它们具有的价值为

$$B_0r\tau P(0,t_{k+1}) \qquad \text{当 } t=0 \text{ 时} \tag{8-20}$$

为了确定 r，令下列两项相等

$$\sum_{k=0}^{N-1} B_0r\tau P(0,t_{k+1}) \quad \text{和} \quad B_0[1-P(0,T)]$$

因此

$$r = \frac{[1-P(0,T)]}{\tau\sum_{k=1}^{N} P(0,t_k)} \tag{8-21}$$

注意公式(8-21)是 r 惟一可能的值. 任何其他的值都会导致套利机会的存在.

例 已知零息券的价格如表 8-4 中所列. 我们期望计算出利率互换时应当要求的利率 r.
153 我们将为一笔固定面值为 B_0，期限为 4 年的贷款支付每六个月的浮动利率利息.

表 8-4 零息券的价格

时间	$P(0, T)$(零息券价格)
6 个月	0.9977

（续）

时间	$P(0, T)$（零息券价格）
1 年	0.9953
1.5 年	0.9930
2.0 年	0.9906
2.5 年	0.9883
3.0 年	0.9860
3.5 年	0.9837
4.0 年	0.9814

解 将 $\tau=0.5$ 及表 8-4 中 $P(0, t_k)$ 的值代入公式(8-21)，可求得：

$$r=\frac{[1-P(0,4)]}{0.5\sum_{k=1}^{8}P(0,t_k)}$$

$$=\frac{[1-0.9814]}{0.5\times 7.9160}=0.004699$$

我们很容易将这种方法沿用至每个时间段上本金和区间长度都不同的情况．现在，我们假设：

1. 总时间期限为$[0, T]$. 银行将在 t_1，t_2，…，t_N 进行支付. 每段时间区间的长度为

$$\tau_k = t_{k+1} - t_k ; t_0 = 0 , t_N = T.$$

2. 区间$[t_k, t_{k+1}]$上的本金为 B_0.

3. 与前面相同，$[t_k, t_{k-1}]$上的利率为 R_k，该利率由 t_k 时刻决定，且在 $t=0$ 时是未知的.

4. $[t_k, t_{k+1}]$上应支付的利息为 $B_k\tau R_k$，且在 $t=t_{k+1}$时支付.

与前面一样，$t=0$ 时，银行买入 B_k 的债券 $P(0, t_k)$并售出 B_k 的债券 $P(0, t_{k+1})$. $t=0$ 时的头寸价值为：

$$B_k[1-(1+R_k\tau_k)^{-1}] \tag{8-22}$$

银行将这些金额在$[t_k, t_{k+1}]$上进行再投资，t_{k+1}时的价值为

$$B_k[1-(1+R_k\tau_k)^{-1}](1+R_k\tau_k) = B_kR_k\tau \tag{8-23}$$

这个值恰好是浮动利率要求支付的金额. 银行在 t_{k+1}时可获得一笔 $B_kr\tau_k$ 的支付. 这笔支付贴现后的价值为

$$B_kr\tau_kP(0,t_{k+1}) \tag{8-24}$$ 154

因此

$$\sum_{k=0}^{N-1}B_kr\tau_kP(0,t_{k+1}) = \sum_{k=0}^{N-1}B_k[P(0,t_k)-P(0,t_{k+1})] \tag{8-25}$$

这个等式同样永远成立. 让我们再进一步讨论，注意到

$$P(0,t_k) = P(0,t_{k+1})(1+F_k\tau_k), \tag{8-26}$$

其中 F_k 是$[t_k, t_{k+1}]$的远期利率．于是，可以把

$$[P(0,t_k)-P(0,t_{k+1})]$$

改写成：

$$F_k\tau_k P(0,t_{k+1})$$

替换后，公式(8-25)变为：

$$\sum_{k=0}^{N-1} B_k r\tau_k P(0,t_{k+1}) = \sum_{k=0}^{N-1} B_k F_k\tau_k P(0,t_{k+1})$$

因此：

$$r=\frac{\sum_{k=0}^{N-1} B_k F_k\tau_k P(0,t_{k+1})}{\sum_{k=0}^{N-1} B_k\tau_k P(0,t_{k+1})} \tag{8-27}$$

如果我们令

$$w_k=\frac{B_k\tau_k P(0,t_{k+1})}{\sum_{k=0}^{N-1} B_k\tau_k P(0,t_{k+1})} \tag{8-28}$$

则可得到

$$r=\sum_{k=0}^{N-1} F_k w_k \tag{8-29}$$

可见，r 为远期利率的加权平均．

8.4.2 几何利率

情况 1：本金和时间间隔不变

如同算术利率中的第一种情况，我们假设每个时间区间的本金 B_0 和间隔 $t_{k+1}-t_k=\tau$．在 $k=0$，1，…，$N-1$ 时保持不变．而 t_{k+1}时应支付的$[t_k, t_{k+1}]$期间的利息变为

$$B_0[e^{R_k\tau}-1] \tag{8-30}$$

采用与之前相同的方法，在 $t=0$ 时，银行买入 B_0 的债券 $P(0, t_k)$并售出 B_0 的债券 $P(0, t_{k+1})$．则 $t=t_k$ 时，头寸的价值为

$$B_0[1-e^{-R_k\tau}] \tag{8-31}$$

155 同样，银行把这些金额以 R_k 在$[t_k, t_{k+1}]$上进行再投资．

在 t_{k+1}的时候，头寸的价值为

$$B_0[1-e^{-R_k\tau}]e^{R_k\tau}=B_0[e^{R_k\tau}-1]$$

这恰好相当于所支付的利息，则

$$\sum_{k=0}^{N-1} B_0[P(0,t_k)-P(0,t_{k+1})]=B_0[1-P(0,\tau)]$$

$$=\sum_{k=0}^{N-1} B_0[e^{r\tau}-1]P(0,t_{k+1})$$

因此

$$e^{r\tau}-1=\frac{[1-P(0,\tau)]}{\sum_{k=0}^{N-1}P(0,t_{k+1})} \tag{8-32}$$

我们很容易解出 r.

情况 2：可变的本金和时间区间

我们引入可变的本金 B_k 和可变的时间$[t_k,\ t_{k-1}]$，这里$(t_{k+1}-t_k)$是任意的.

注意到

$$P(0,t_k)=P(0,t_{k+1})e^{F_k\tau_k}$$

F_k 是时间段$[t_k,\ t_{k+1}]$内的远期利率. 如前面所提到的，我们可以证明：

$$e^{r\tau}-1=\frac{\sum_{k=0}^{N-1}B_k[e^{F_k\tau_k}-1]P(0,t_{k+1})s}{\sum_{k=0}^{N-1}B_kP(0,t_{k+1})} \tag{8-33}$$

如果我们设

$$w_k=\frac{B_kP(0,t_{k+1})}{\sum_{k=0}^{N-1}B_kP(0,t_{k+1})}$$

可得

$$e^{r\tau}-1=\sum_{k=0}^{N-1}w_k[e^{F_k\tau_k}-1] \tag{8-34}$$

因此 $e^{r\tau}-1$ 是远期利率 $e^{F_k\tau_k}-1$ 的加权平均.

习题

1. 我们在表 8-5 中给出零息券的价格. 互换中固定利率换成浮动利率，试求应收取的固定利率. 每 6 个月支付一次，面值为 B_0 不变，为期 5 年.

表 8-5 零息券价格

时间	P(0, T)(零息券价格)
6 个月	0.9971
1 年	0.9950
1.5 年	0.9924
2.0 年	0.9901
2.5 年	0.9870
3.0 年	0.9841
3.5 年	0.9817
4.0 年	0.9799
4.5 年	0.9780
5.0 年	0.9758

2. 在表 8-6 中给出零息券价格，互换中固定利率换成浮动利率，试求应收取的固定利率. 每 3 个月支付一次，面值为 B_0 不变，为期 3 年.

表 8-6 零息券价格

时间	$P(0, T)$(零息券价格)
3 个月	0.9982
6 个月	0.9969
9 个月	0.9960
1 年	0.9949
1.25 年	0.9936
1.5 年	0.9924
1.75 年	0.9911
2.0 年	0.9898
2.25 年	0.9885
2.5 年	0.9873
2.75 年	0.9859
3.0 年	0.9846

3. 在表 8-7 中给出零息券价格和贷款的本金，互换中固定利率换成浮动利率，试求应收取的固定利率. 每 6 个月支付一次，为期 4 年，本金在表中已列出.

提示：利用式(8-25). 解出 r，得到：

$$\frac{\sum_{k=0}^{N-1} B_k[P(0,t_k)-P(0,t_{k+1})]}{\tau\sum_{k=0}^{N-1} B_k P(0,t_{k+1})}$$

表 8-7 零息券价格

时间	本金 (百万)	$P(0, T)$ (零息券价格)
0	10	1.0
6 个月	9	0.9965
1 年	9.5	0.9924
1.5 年	10	0.9892
2.0 年	8	0.9856
2.5 年	9.5	0.9821
3.0 年	11	0.9788
3.5 年	10.5	0.9758
4.0 年	0	0.9719

8.5 利率模型

债券价格模型有很多种，其中的很多都建立在一个特定的假设基础上，即短期利率是如何随时间变化的. 这些基于单一利率的债券模型都同时具有其优点和

缺点，而且内容是相当广泛的．我们首先来看离散利率模型． 156~157

8.5.1 离散利率模型[⊖]

要建立一个与实际相符合的利率模型比看起来更富有挑战性．让我们先看一个简单的侯选模型，如图 8-9.

在第一段时间[0，1]间只有一枝，因为我们在这段时间的开始是知道利率的．为了使我们的例子看起来更简单一些，我们把已经知道利率的这一枝去掉（图 8-10)．这个例子中的数字并不十分现实，但它们能使运算简便，且能使我们更好地理解．

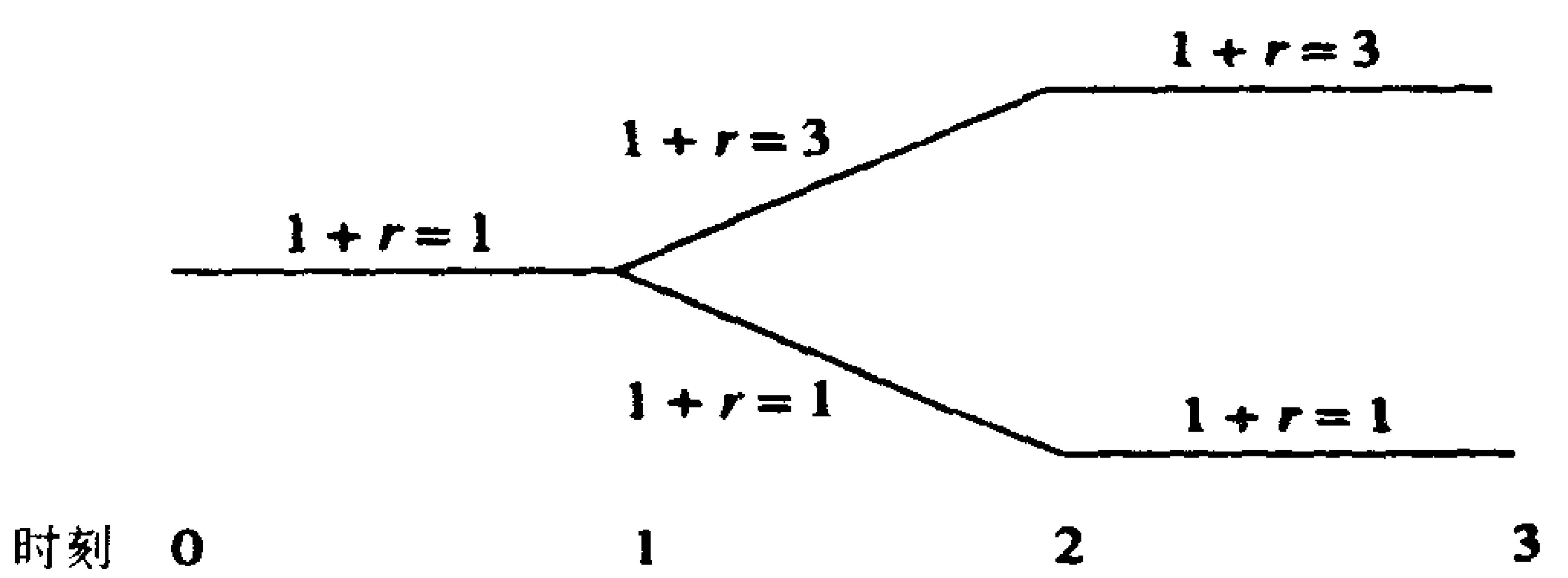


图 8-9 利率模型

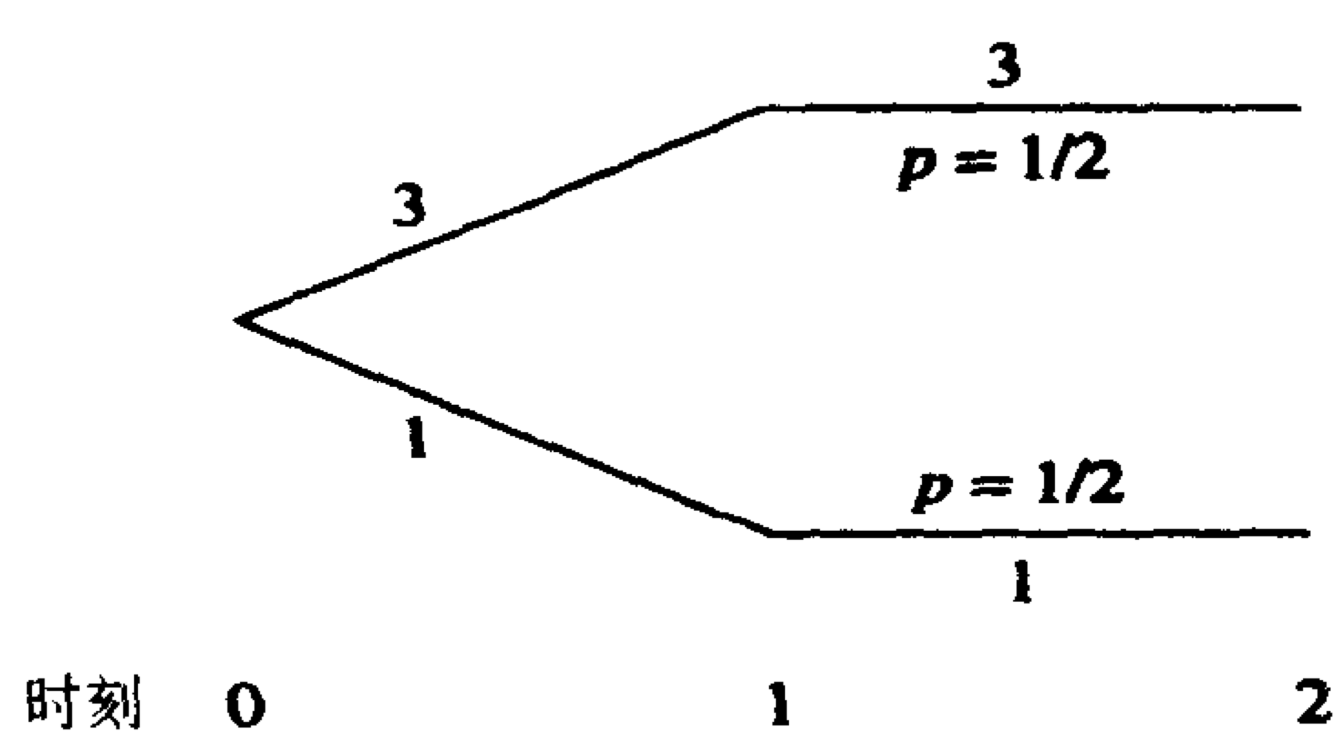


图 8-10 不考虑第一时间区间已知利率的利率模型

未来利率决定现在

假设我们认为这个模型精确地反应了将来利率的走向．那么一家银行或一个经纪人在图 8-10 中的[0，1]时间段内会怎样收取它的贷款的利息呢?

假设 我们假设银行或经纪是“风险中性者”．也就是说，确定的 1 美元与预期收到 1 美元具有相同的价值．大多数人都不是“风险中性者”，然而，每个人对风险的承受能力是有很大差别的．

回到我们的问题上，也许大多数人都会回答，在[0，1]时间段内，收取的利

⊖ 改编自“Realistic Consistent InterestModels,”Indiana University Technical Report, May2000, by Joseph Stampfli.

率 $1+r$ 应等于

158
$$(1+3)/2=2$$

这并不正确. 考虑银行有 1 美元可以贷出. 它可以在 $t=0$ 把它投资在一货币市场基金，则

$$t=0\text{ 时投资的 1 美元在 }t=2\text{ 时的期望值}=\frac{1}{2}(3\times 3+1\times 1)=5\text{ 美元}$$

假设它在[0, 1]时间段以 $1+r=x$ 的利率贷出这 1 美元. 那么在 $t=1$ 时，它收到 x 美元. 它再把资金在[1, 2]时间段投资于货币市场基金. 她在[1, 2]内的预期收益是

$$1+r=(3+1)/2=2$$

所以在贷款和投资与货币市场后，这 1 美元在[0, 2]时间段的收益为 $2x$ 美元. 为了与在货币市场投资的回报相等，必须有 $2x=5$ 或 $x=2.5$ 美元. 为什么呢? 未来利率决定现在. 高利率出现在二叉树的上枝. 只有极端愚蠢的银行家才会接受在[0, 1]低于 $1+r=2.5$ 的利率. 相反，如果贷款利率超过 2.5，超额利润导致的贷款人之间的竞争会使利率水平回落到 2.5.

我们把刚才的例子稍稍修改一下，得到第二个例子，如图 8-11. 用和前面相同的方法，你可以算出在我们"风险中性"的假设下，这个模型总[0, 1]内的利率应该是 $1+r=1.5$. 再次注意到现在的利率是深受未来利率影响的.

图 8-12 表示的是一般情形下的离散利率模型. 在该模型中，[0, 1]时间段的利率应该是

$$\frac{ac+bd}{c+d}$$

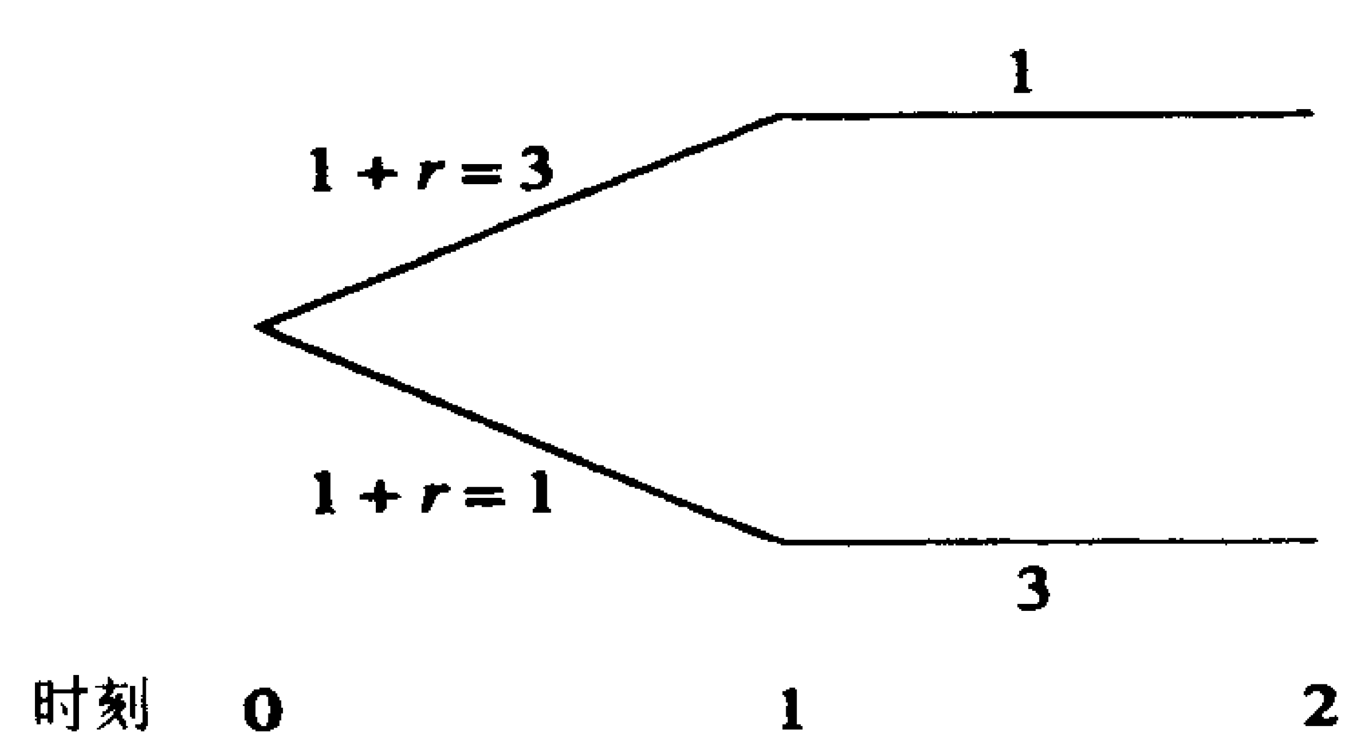


图 8-11 修改后的利率模型

抵押 我们一直考虑的情况是银行在[0, 1]内(或其他时间段)把 1 美元贷给客户. 我们经常会假设客户会提供抵押以保证贷款归还. 特别地，在美国有一种很普遍的金融业务，称为回购市场. 这个市场提供一天或隔夜的贷款. 其操作过程如下：交易商贷款给客户 1 000 000 美元，而客户以 1 000 000 美元的政府债券抵押给交易商. 政府债券所有人仍是客户，当他还清贷款时，政府债券就归还给客户.

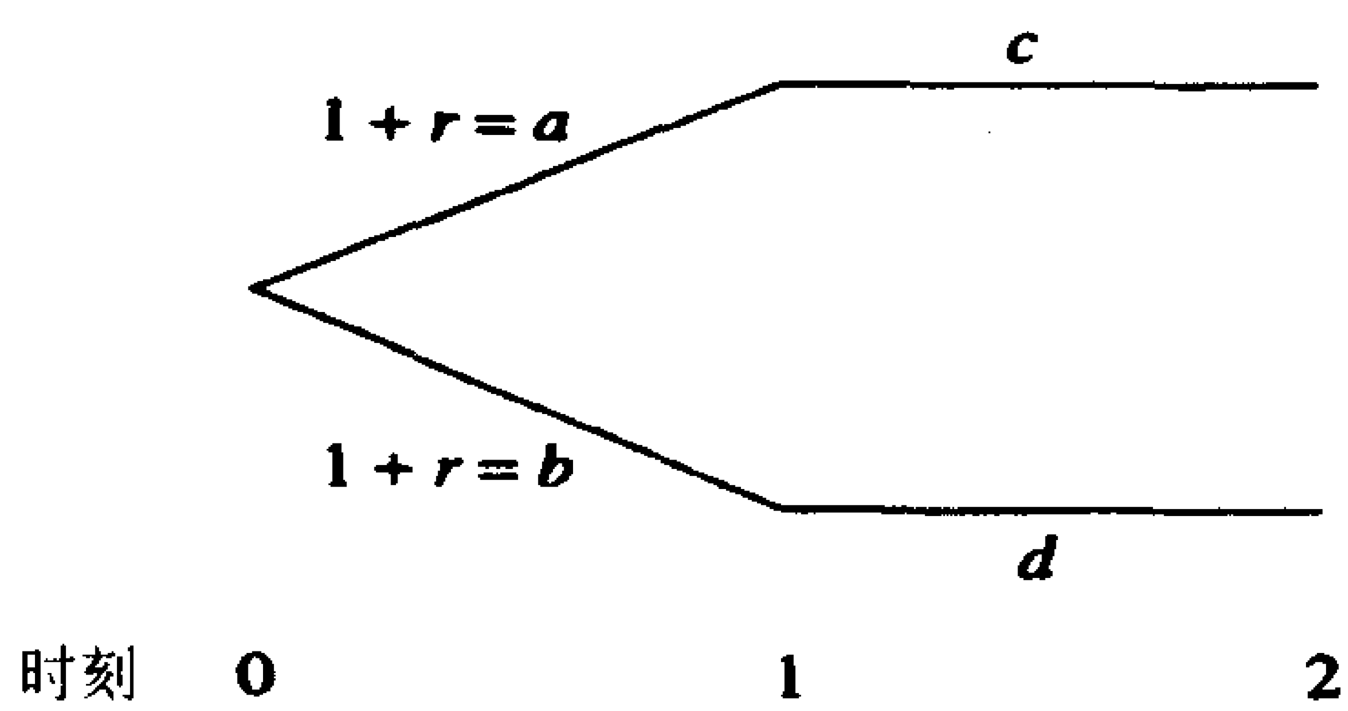


图 8-12　一般情形下的利率模型

例　考虑图 8-13 所示的利率模型．[0，1]内的利率应该为

$$\frac{ac+bd}{c+d}$$

注意 $t=0$ 时刻投资的 1 美元在 $t=2$ 时的期望值是所有分支上乘积结果的平均，即 $(ac+bd)/2$.

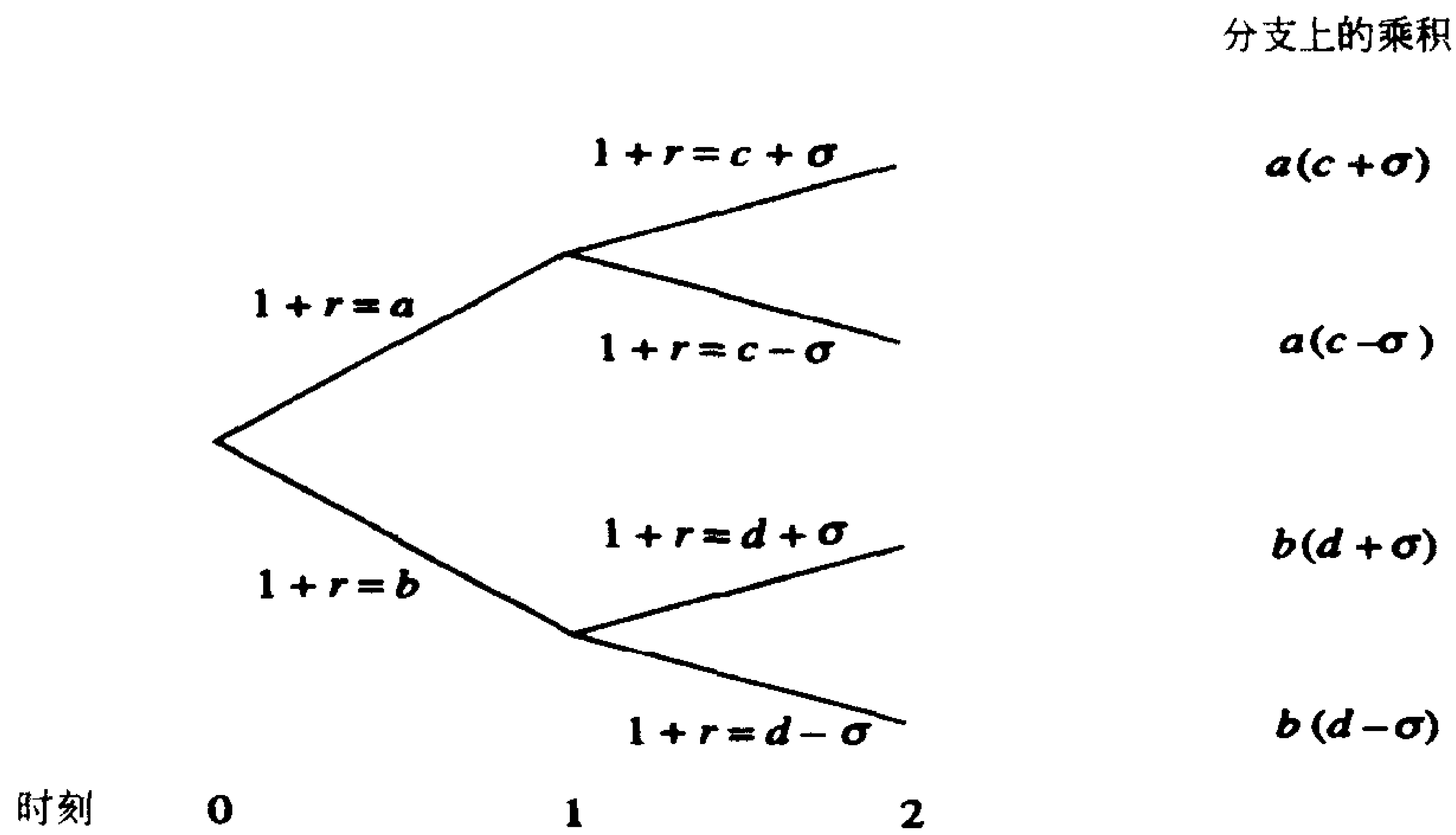


图 8-13　分支上的乘积

例　在第一个例子中，我们用的利率和现实中的利率有很大出人．让我们来看一个采用贴近实际的利率的例子，如 8-14 所示．

则[0，1]内的利率应是

$$\frac{ac+bd}{c+d}=\frac{1.04^2+1.06^2}{1.04+1.06}$$

$$=1.0500952$$

注意到这里的利率比 1.04 和 1.06 平均值 1.05 稍大一点．

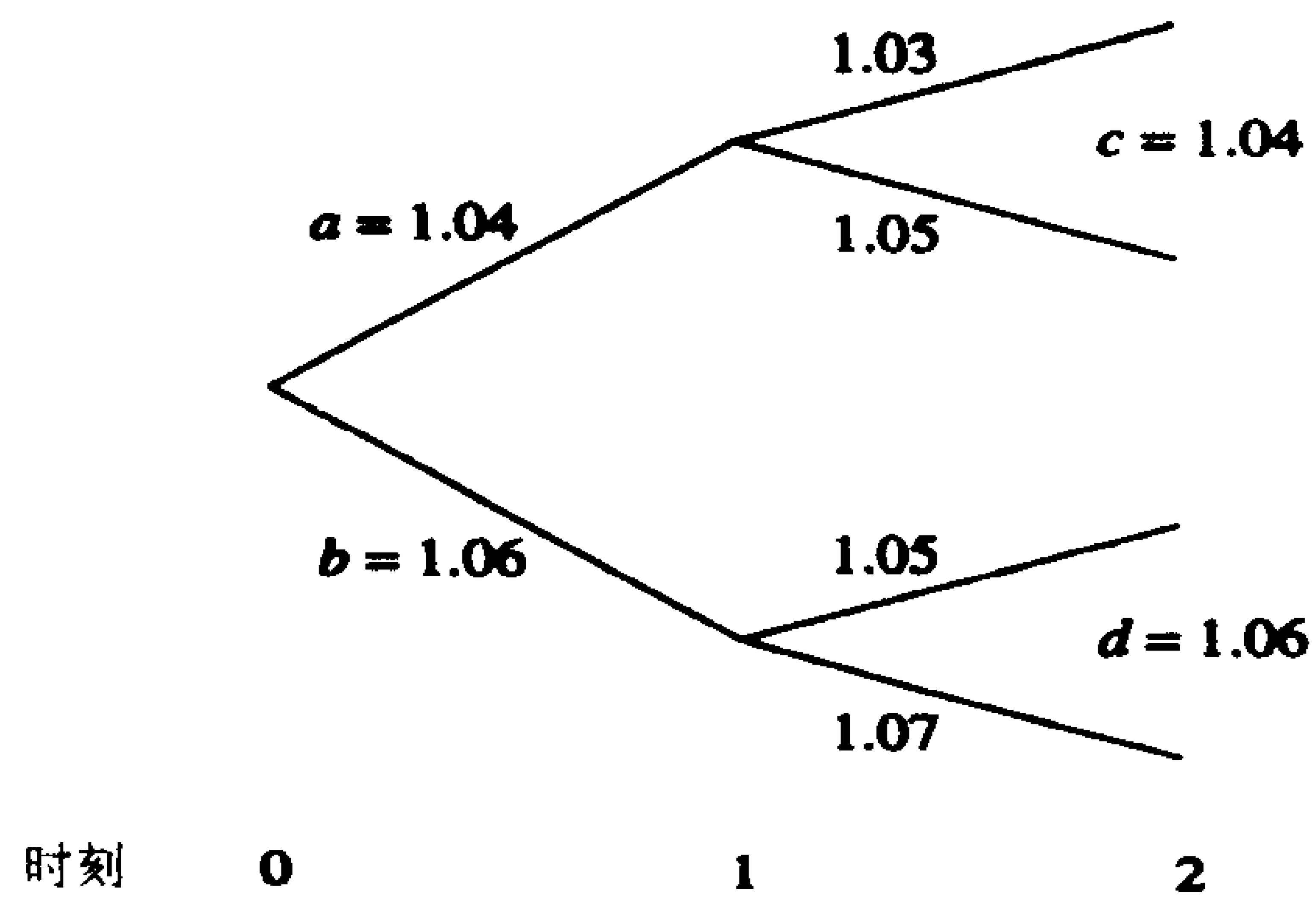


图 8-14 采用现实利率的模型

一个特殊的倒向利率模型

在接下来的部分，我们会用倒向的方法来计算零息券的价格. 所以我们现在先要对模型做一些说明.

倒向模型 在这个模型里(图 8-15)，从任何节点发出的两枝必须具有相同的值. 图 8-14 并不是一个倒向模型，因为在[0，1]内，1.04≠1.06，而其他的节点也是如此.

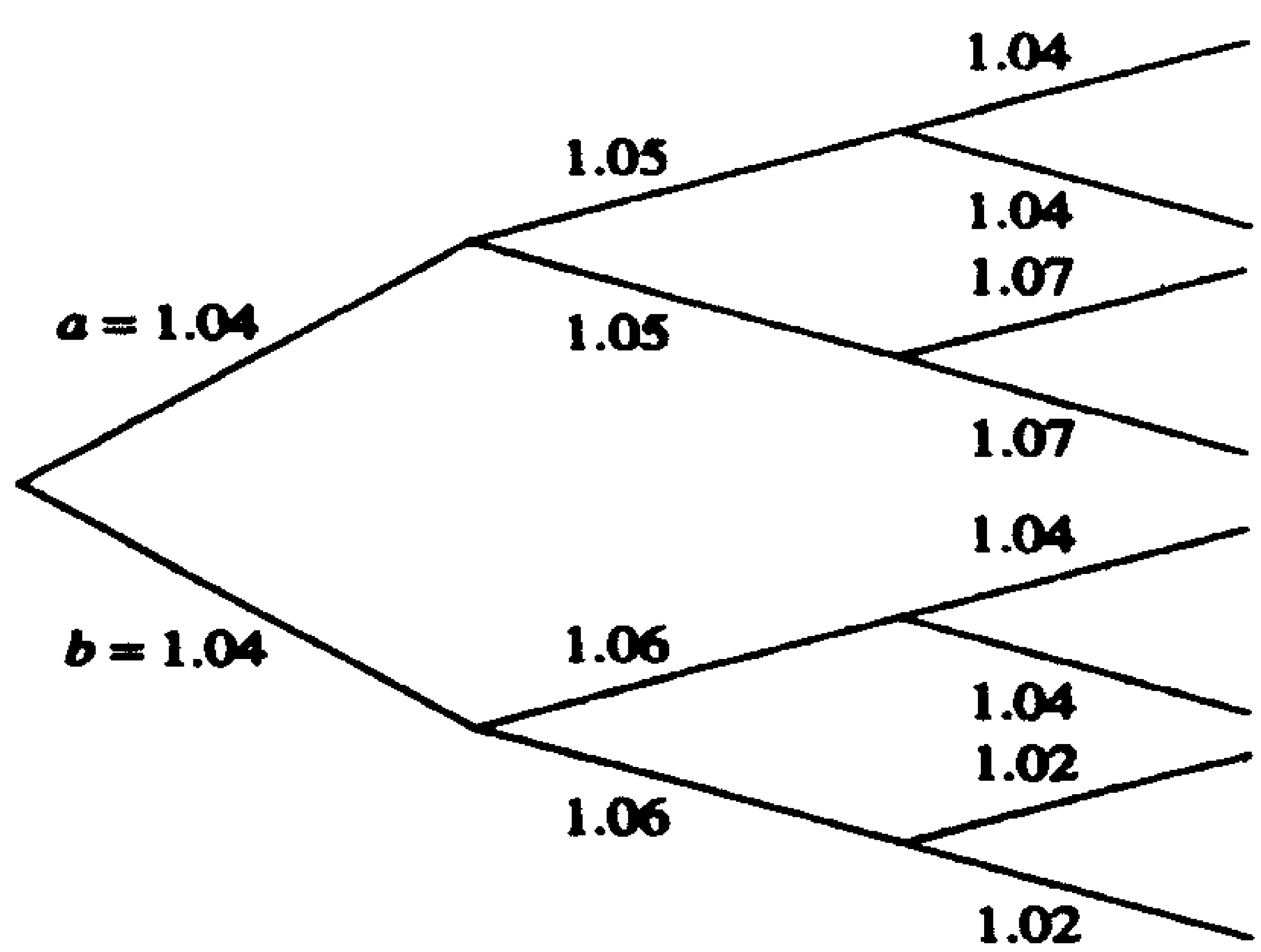


图 8-15 倒向模型

N 期情形下的利率

假设我们的利率模型(二叉树图)有 N 期. 那么怎样像前面那样找到在[0，1]内有效的或者说市场利率$(1+r)$呢? 答案很简单.

步骤一 找出在 $t=t_0=0$ 时投资的 1 美元在 $t=t_N=N$ 时的期望值，称为$E[1 \mid t=t_N]$.

步骤二 把[0，1]内的两枝上的值(我们称为 a 和 b)替换成未知值 x. 按步

骤一，计算在 $t=t_0=0$ 时投资的 1 美元在 $t=t_N=N$ 时的期望值，把这个新的值称为 $E^x[1 \mid t=t_N]$.

步骤三 让 $E^x[1 \mid t=t_N]=E[1 \mid t=t_N]$，解出 x.

结论 在[0，1]内的“有效”或市场利率 $1+r$ 就是在[0，1]内用 $1+r$ 替换原树后仍产生相同预期收益的利率. 考虑一下这个结论，起初看起来有些迷惑，但仔细想来是理所当然的. 159~161

习题

1. 证明 $1+r=1.5$ 是图 8-11 中时间段[0，1]内的合理利率.
2. 证明 $1+r=(ac+bd)/(c+d)$ 是图 8-12 中时间段[0，1]内的合理利率.
3. 证明 $1+r=(ac+bd)/(c+d)$ 是图 8-13 中时间段[0，1]内的合理利率.

8.5.2 用利率模型为零息券定价

在本节，我们将根据本章前面介绍的两种利率模型(期望值和倒向)为零息债券进行定价. 在第 9 章，我们将讨论如何根据现实市场实际数据建立利率模型.

在开始定价之前，我们回顾一下第 2 章. 在这一章中，我们假设投资环境包括(a)一个股票，(b)一份期权和(c)恒定的利率，我们能利用它们来为期权定价. 在这里我们所有的条件是一个利率二叉树图. 答案其实已经出来了.

方法一：期望值法

始终记住我们的假设仍是风险中性. 我们给定的条件是一个 N 步的利率二叉树图. 根据前面提到的步骤，我们计算出在 $t=t_0=0$ 时投资于货币市场的 1 美元在 $t=t_N$ 时刻的期望值，记为 $E[1 \mid [0, t_N]]$，则在 $t=t_N$ 时还本 1 美元的零息券在 $t=0$ 的定价为：

$$1/E[1 \mid [0, t_N]]$$

有一种简单的方法可以总结并帮助记住这个计算过程：

时刻	0	t_N
如果	1 美元	$\to E[1 \mid [0, t_N]]$美元
则	$\dfrac{1}{E[1 \mid [0, t_N]]}$美元	$\to$1 美元

注意：这个方法只有在我们有 N 步的利率二叉树图时适用. 比如，当 $N>1$ 时你希望计算 $P(0, 1)$，即一年零息券的价格. 你必须首先找到[0，1]时间段内的“有效”利率$(1+r_1)$，然后得到 $P(0, 1)=1/(1+r_1)$.

例 1 看前面的图 8-10，由于在 $t=2$ 时，1 美元→5 美元，用期望值的方法，两年的零息券在 $t=0$ 时，定价为 0.20 美元. 162

例 2 看前面的图 8-11. 很容易得出 $E[1 \mid [0,\ 2]]=3$. 所以在 $t=2$ 时付 1 美元的两年零息券在 $t=0$ 时的定价为 $\dfrac{1}{E[1 \mid [0,\ 2]]}=1/3$ 美元

方法二：倒向法(BIM)

倒向法只适用于倒向利率模型. 所以让我们从一个简单的倒向二叉树图开始，如图 8-16. 所有分枝的概率都是 $p=\dfrac{1}{2}$. 图 8-17 表示的是只有一个“三角”的倒向过程，在这个过程中：

$$P_0=\frac{1}{2}(P_u+P_d)/a$$

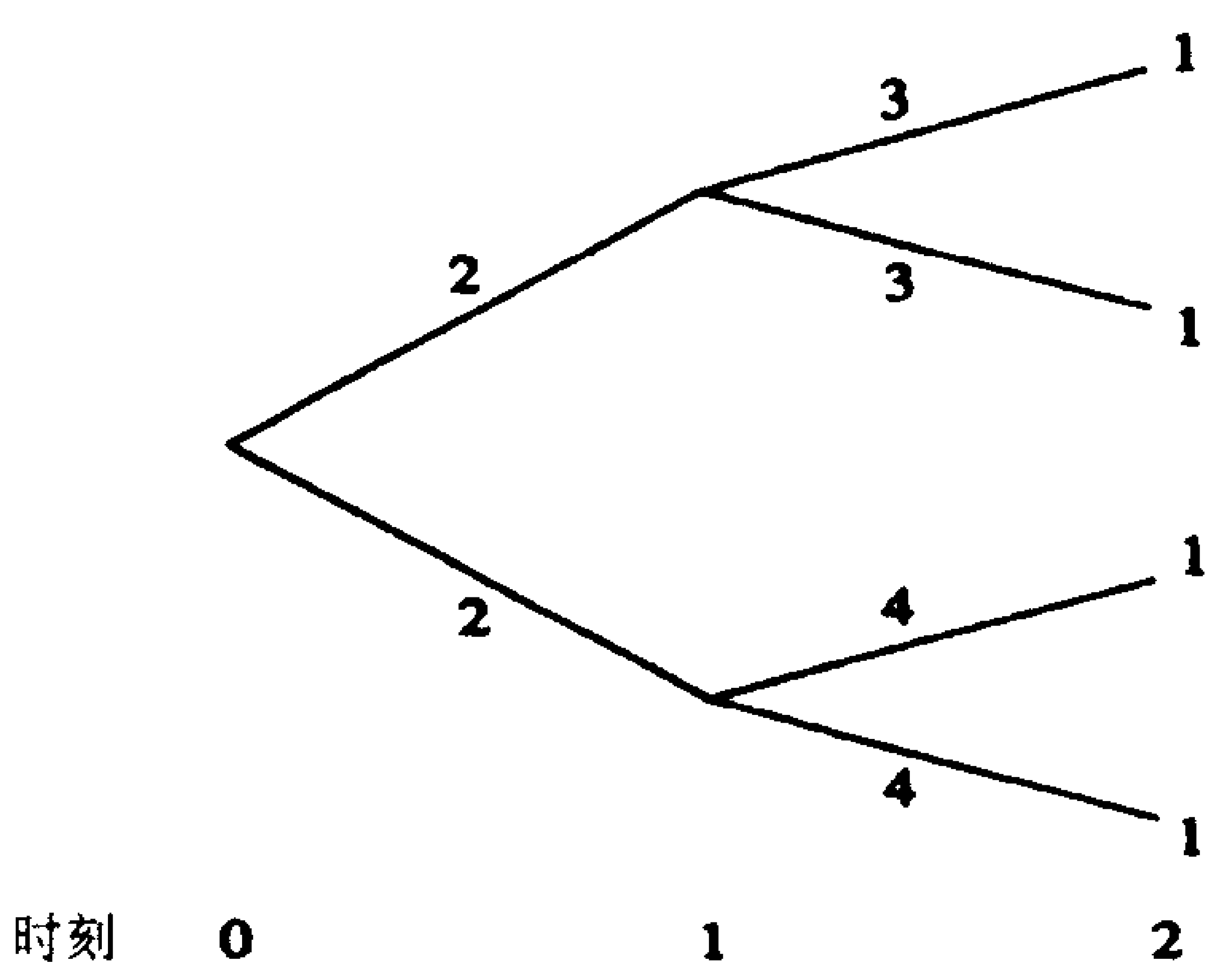


图 8-16 倒向二叉树图

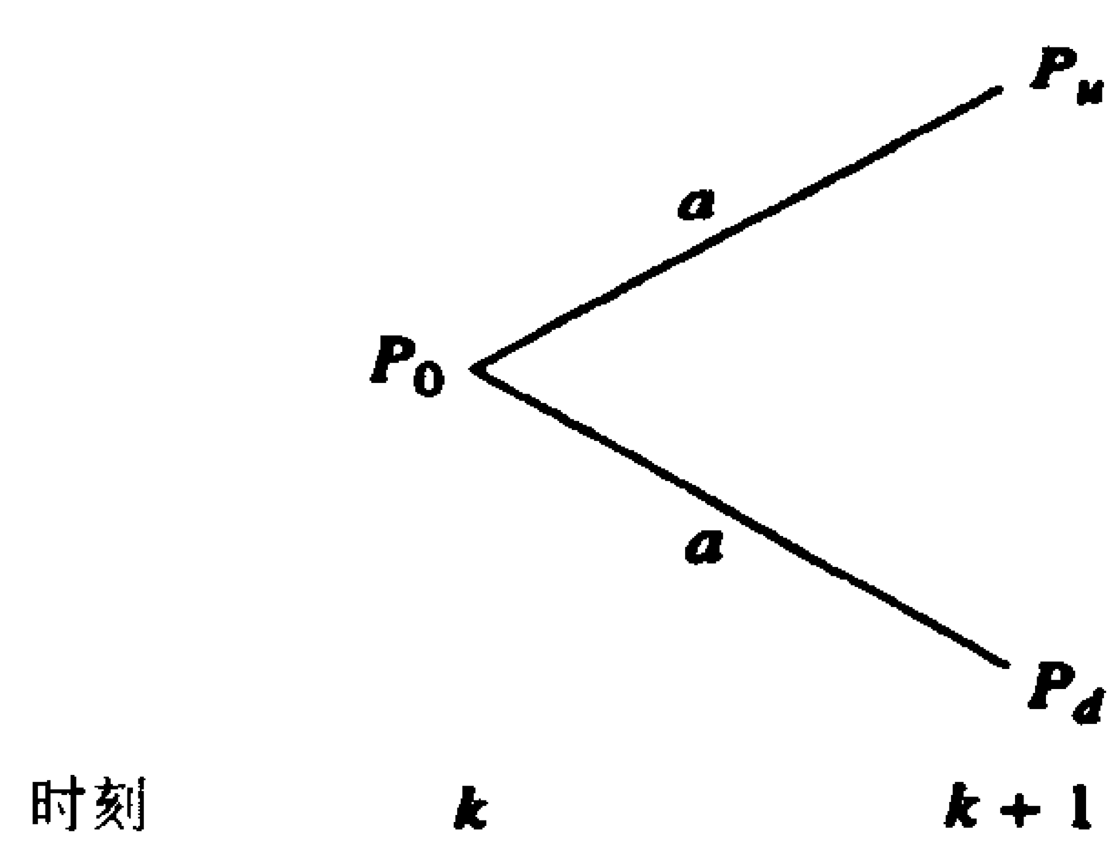


图 8-17 倒向过程

也就是说，我们算出 P_u 和 P_d 的平均值$\left(\text{因为我们设分枝上的概率 } p=\dfrac{1}{2}\right)$，然后在时间段$[k,\ k+1]$上以此利率贴现.

再回到图 8-16，开始倒向推导. 我们在最右边的列上记 1，这表示在 $t=2$ 时零息券的价值. 如图 8-18 所示，$P_u=\dfrac{1}{3}$且 $P_d=\dfrac{1}{4}$，则

$$\begin{aligned}P_0&=\frac{1}{2}\times(1/3+1/4)/2\\&=7/48(\text{美元})\end{aligned}$$

所以，用倒向法这个两年零息券的定价为 7/48.

用期望值法也能很容易为该债券定价. 因为 $E[1 \mid [0,\ 2]]=(6+6+8+8)/4=7$(美元)，所以用期望值法该债券的定价为 1/7 美元.

可以看到，用两种方法对债券的定价会有一些不同. 但注意，如果我们(a)把时间段再细分成更小的时间段 Δt，(b)把利率 $1+r_j$ 替换成 $1+r_j\Delta t$ 且(c)让 Δt
163 $\to 0$，两种方法将得到相同的结果.

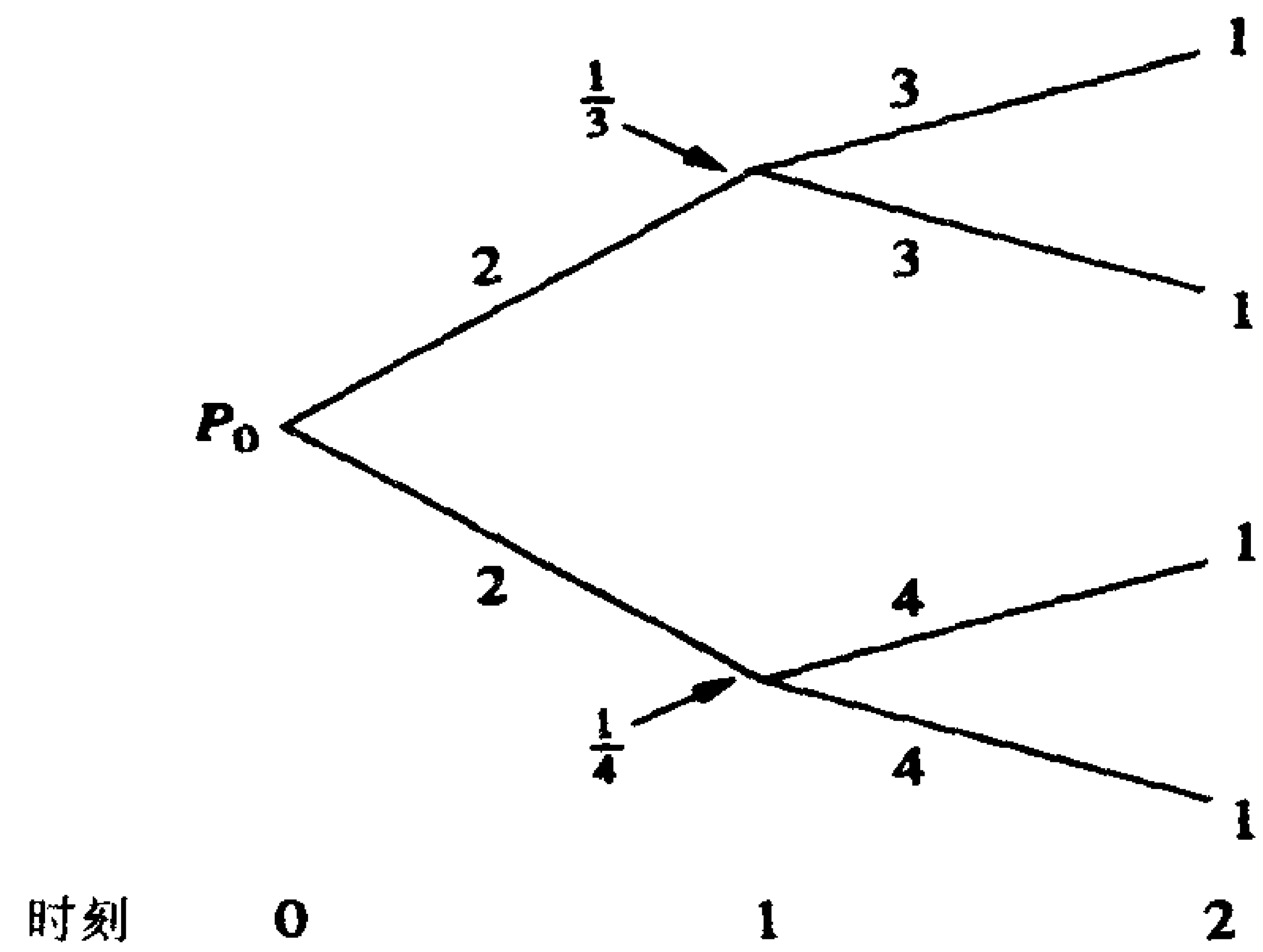


图 8-18 关于图 8-16 的倒向过程

让我们再来看一个结果更戏剧化的例子. 考虑图 8-19 的利率二叉树图，用倒向法进行定价有㊀：

$$P_0 = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{3} + 1\right) = 2/3(\text{美元})$$

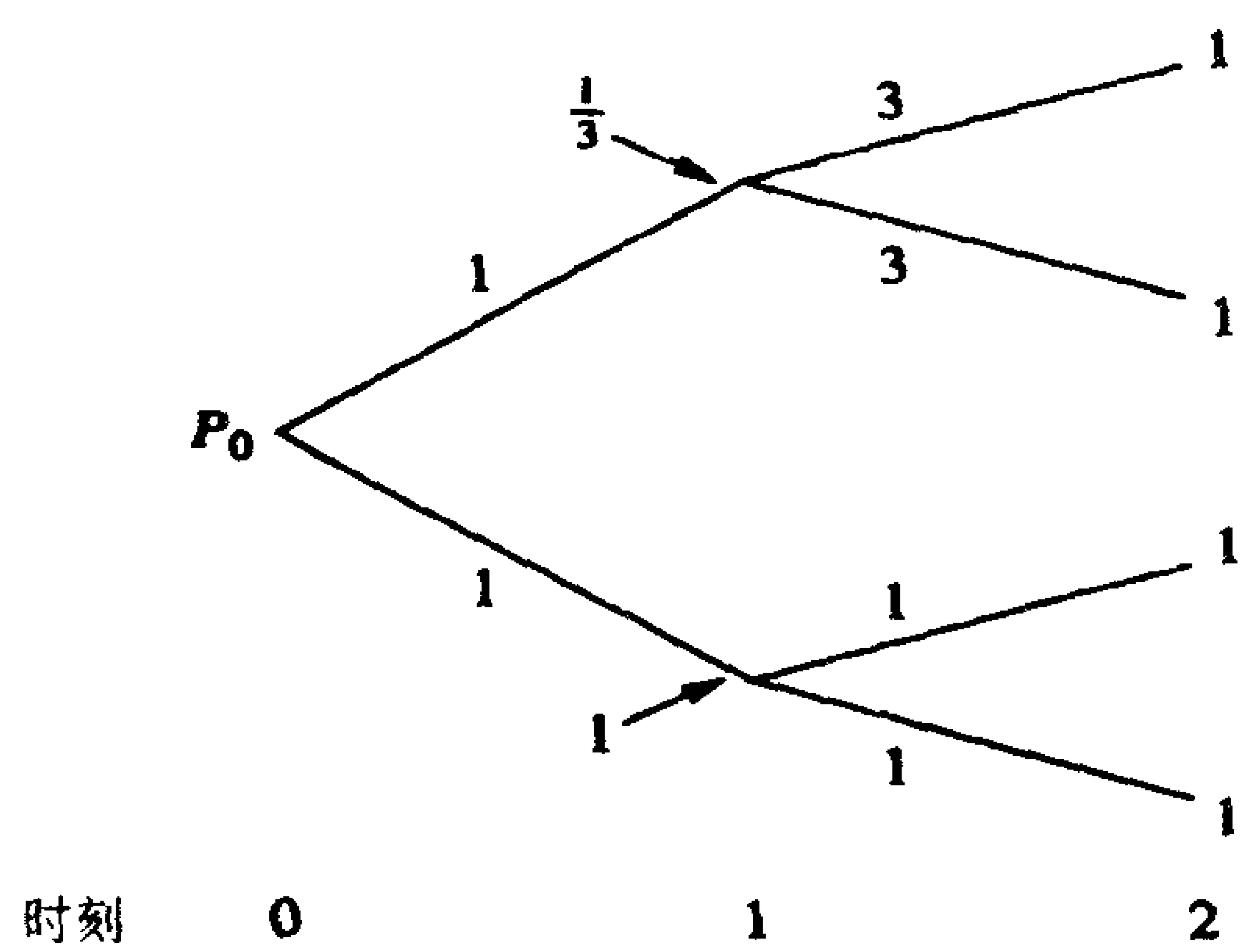


图 8-19 利率二叉树图

用期望值法，

$$P_0 = 1/2(\text{美元})$$

一般化的倒向过程

一般化的倒向方法将处理任意的利率二叉树图. 考虑图 8-17 的利率二叉树图，把上枝利率设为 a，下枝利率设为 b，则

$$P_0 = \frac{1}{2}[(P_u/a) + (P_d/b)]$$

㊀ 原文第 2 项的 1/3 为 1/2，译者认为属笔误.

164 接下来的过程与最初的倒向方法完全一样.

8.5.3 债券价格悖论

期望值法和倒向法对零息券的定价有着不同的结果. 显然有两个问题需要回答：(1)为什么会这样？(2)在现实中是怎样解决这个问题的？

答案 1 事实上倒向法是 Simpson 悖论的一种间接形式. Simpson 悖论的宗旨就是“你不能平均平均数”. 让我们来看一个最简单的 Simpson 悖论的例子：现在有两个棒球手，Able 和 Baker，表 8-8 列出了他们的比赛成绩. 可以看到尽管 Able 对右手和左手的投掷的平均成绩都高于 Baker，但 Baker 总的平均成绩却比 Able 高. 这种与我们直觉认为的结果相反的变换就是 Simpson 悖论的核心.

表 8-8 Able 对 Baker

	Able	Baker
对左手投手：		
击中次数/击球次数	6/21	2/9
平均	0.286	0.222
对右手投手：		
击中次数/击球次数	5/10	10/21
平均	0.500	0.476
总的投手：		
击中次数/击球次数	11/31	12/30
平均	0.355	0.400

答案 2 让我们再回到图 8-19 的例子. 一个风险中性的投资者(即他认为实际的 1 美元与预期的 1 美元价值相等)，他不会以高于 0.50 美元的价格来购买两年的零息券，因为他可以直接把这 0.50 美元投资在货币市场. 这项投资将使他在两年后预期收到 1 美元. 值得注意的是虽然投资者知道有关零息券定价结果不一样的争论，但他并不关心. 相反，他很愿意将以高于 0.50 美元的任何价格把两年的零息券卖掉(然后再把收益投资于货币市场).

由于风险中性投资者(risk-indifferent investor，简称 RII)会卖出高于 0.5 美元价格的债券，或者说不会高于 0.5 美元购买两年期的零息券，因此在实际的市场上(更严格的说应是风险中性投资者的市场上)债券的价格会很快回到 0.5 美元.

另一种情况 某种程度而言这个风险中性的投资者可能错过了一些机会. 假设有一个投机者(speculative investor，简称 SI)，他以 0.60 美元的价格从风险中性的投资者 RII 处购买两年的零息券. 他们俩将都很乐意做这笔生意. 在第一年

末的时候，投机的投资者会觉得自己会赢，因为在 $t=1$ 时，该两年期的零息券的价值为：

$$1/2\times(1+1/3)=2/3=0.6666(\text{美元})$$ 165

（注意到在 $t=1$ 时，0.60 美元在货币市场的价值仍为 0.60 美元）. 但事实并非如此，投机者(SI)在 $t=1$ 时并不会收到 0.666 美元. 让我们考虑两种可能.

二叉树上枝 投机者(SI)收到 0.33 美元. 他能对这 0.33 美元做些什么呢？他可以以 3.00 的当前利率($1+r$)进行投资. 这样的话，在 $t=2$ 时就能收到 1 美元. 如果他持有债券的话他也能收到 1 美元，所以并没有什么发生改变.

二叉树下枝 投机者(SI)收到 1 美元. 同样，他能对这 1 美元做些什么呢？如果他以 1.00 的当前利率($1+r$)投资，在 $t=2$ 时就能收到 1 美元. 但如果他持有债券的话他也能收到 1 美元，所以还是没有什么发生改变.

现在我们要关注一下我们之前对 Simpson 悖论的评价. 倒向法忽略了投资者在 $t=1$ 的时候并不是收到 0.66 美元，而是要么收到 0.33 美元要么收到 1 美元. 而且在“坏的”利率环境下，他收到 1 美元；在“好的”利率环境下，他收到 0.33 美元. 就是这个区别而已. 而对风险中性的投资者来说，无论是“好的”还是“坏的”利率环境，他都会投资相同的 0.50 美元.

8.5.4 期望值定价法能套利吗

考虑图 8-19 的利率模型. 用期望值法对两年零息券的定价能套利吗？答案初看来是肯定的. 你在一年债券上借了 0.50 美元(以 $1+r=1$ 的利率)，且以 0.50 美元购买两年零息券. 在 $t=1$ 时，两年零息券在上枝值 1/3 美元而在下枝值 1 美元，所以两年零息券在 $t=1$ 时的预期价值是 2/3 美元. 你在一年期债券上欠了 0.50 美元，所以看起来你获得了利润. 但如果深入地看待这个问题时会发现：在 $t=1$ 时，你必须偿还一年期债券上的债务. 如果利率在 $t=1$ 时移向上枝，你的两年零息券只值 1/3 美元，你便不能偿还你的债务(以一年期债券表示). 卖给你债券的人还会在 $t=0$ 时向你索要抵押；如果没有抵押的话他一开始就不会把债券卖给你了.（参看练习 6)你可以把两年零息券作为部分的抵押，把它记为 1/3 美元，这就意味着你还要自己拿出一些钱或抵押品.

从头开始看这一过程：你借了 1/3 美元，自己拿出 1/6 美元，以 0.50 美元的价格购买两年零息券，并把它给预付给你 1/3 美元的经纪人作为抵押.（注意在[0，1]时间段的利率是 $1+r=1$). 在 $t=1$ 时，对债务头寸进行对冲. 投资者会面临两种情况：

二叉树上枝 两年零息券值 1/3 美元. 你把它卖掉，把得到的 1/3 美元还给贷款给你的经纪人. 你现在的净头寸是 0 美元. 166

二叉树下枝 两年零息券值 1 美元. 你把它卖掉，把 1/3 美元还给贷款给你的经纪人. 你还剩 2/3 美元，你以($1+r=1$)的当前利率进行投资. 在 $t=2$ 时，

你的头寸值 2/3 美元. 然后，把两枝的结果平均一下，你最初投资的 1/6 美元的预期价值为

$$1/2\times(0+2/3)=1/3(\text{美元})$$

所以你的 1/6 美元在此过程中变为 1/3 美元. 但如果你 $t=0$ 时把这 1/6 美元投资于货币市场，在 $t=2$ 时你的期望值也是 1/3 美元. 所以，至少在这种情况下，并不存在套利.

一般的两步情况

考虑图 8-20 的利率二叉树图. 用期望值法，两年零息券在 $t=0$ 时的定价为 $2/(ac+bd)$. 在这段时间的市场利率为$(ac+bd)/(c+d)$(你可以检验一下这些结论). 你希望在 $t=0$ 时购买两年零息券. 该债券在 $t=1$ 时的最小价值为 $1/c$(因为 $c>d$). 你将要对你所借的钱付利息，记借入资金数量为 x. 当你在 $t=1$ 还款时，则有：

$$x\frac{ac+bd}{c+d}=\frac{1}{c}$$

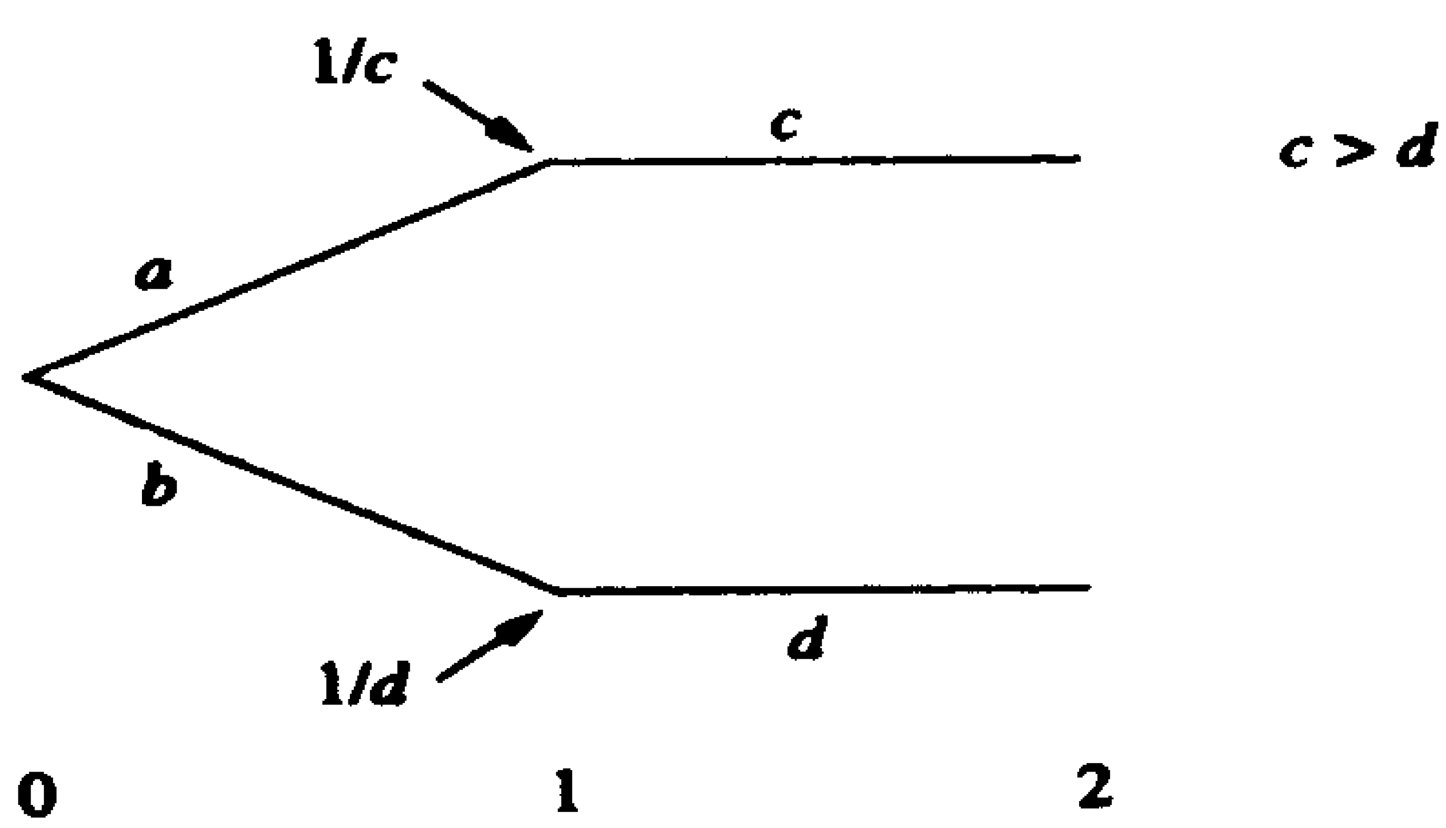


图 8-20 利率二叉树图

所以

$$x=\frac{c+d}{c(ac+bd)}$$

那么你在 $t=0$ 时的自有资金应为：

$$\frac{2}{ac+bd}-x=\frac{c-d}{c(ac+bd)}$$

在 $t=1$ 时，你会卖掉两年期债券来偿还贷款，然后把剩下的钱以当前的利

167 率投资. 让我们看看面临的结果.

二叉树上枝 两年零息券的价格恰好等于要偿还的欠款，所以你的净头寸是 0.

二叉树下枝 卖掉两年零息券得到 $1/d$，你欠经纪人 $1/c$. 现在你剩下$(1/d-1/c)$，你以当前利率 d 再进行投资. 在 $t=2$ 时，你的头寸价值为：

$$d\left(\frac{1}{d}-\frac{1}{c}\right)=d\left(\frac{c-d}{cd}\right)$$

然后，把上下枝平均一下，你预期的净价值是$(c-d)/2c$. 让我们总结一下该过程：

初始投资		最终头寸
$\frac{c-d}{c(ac+bd)}$	$\longrightarrow$	$\frac{c-d}{2c}$

该投资显然与下面的投资是等价的：

$$1 \longrightarrow \frac{ac+bd}{2}$$

这恰好与你直接投资于货币市场的期望回报是完全相同的. 所以，期望值法得到的是没有套利的定价，至少从前面的分析看来是这样.

事实上，按照前面的证明方法我们还可推出一些其他结论. 考虑图 8-21 的利率二叉树图. 用与图 8-20 相同的计算方法我们可以证明，像图 8-21 一样复杂的二叉树图，采用期望值法得到顶定价是无套利的，其中的计算方法是完全相同的.

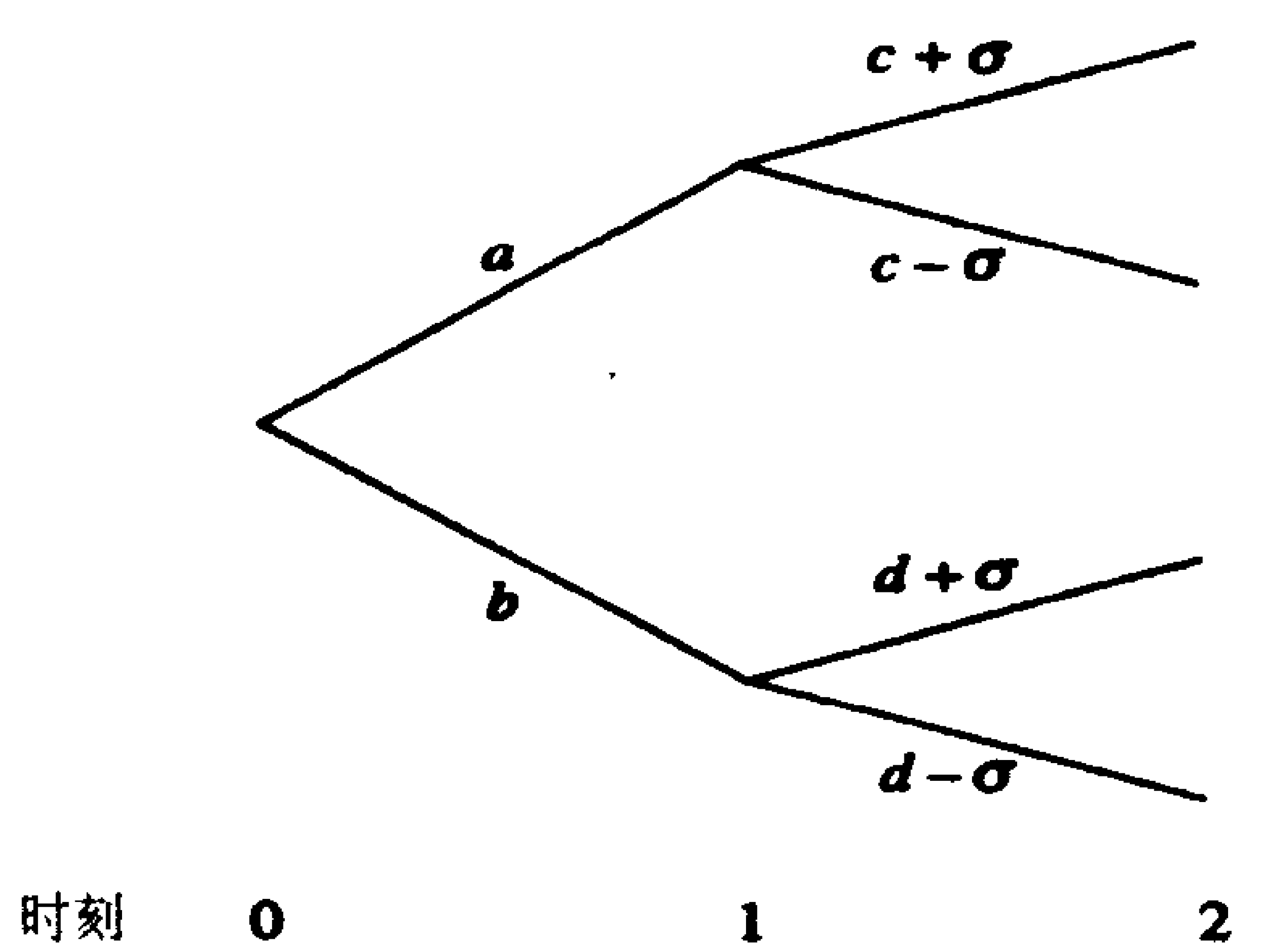


图 8-21 利率二叉树图

注释 很多论文作者都认为倒向法来计算债券价格是不存在套利的. 然而 Musiela 和 Rutkowski 认为，只有增加了附加的漂移条件，模型才是无套利的. 参看他们的《金融模型中的鞅方法》(《*Martingale Methods in Financial Modelling*》, 168
Springer, New York 1997)，304 页.

习题

1. (a)图 8-22 给出一利率二叉树图，计算在 $t=0$ 时投资的 1 美元在 $t=2$ 时的预期价值. 假设所有分枝上的概率都是 1/2.

(b)用期望值法计算两年零息券在 $t=0$ 时的价值.

(c)用期望值法计算在(b)中的两年零息券在 $t=1$ 时的价值.

(d)计算在 $t=0$ 时投资的 1 美元在 $t=1$ 时的预期价值.

(e)比较(c)和(d)的结果.

	a	b	c	d	σ
1	2	1	3	2	1/2
2	1	2	3	2	1/2
3	2	3	2	3	0.25
4	1.5	2	1.5	2	0.10
5	1.25	1.3	1.4	1.5	0.15
6	1.10	1.2	1.2	1.3	0.10
7	1.05	1.10	1.10	1.2	0.05
8	1.06	1.04	1.05	1.07	0.04

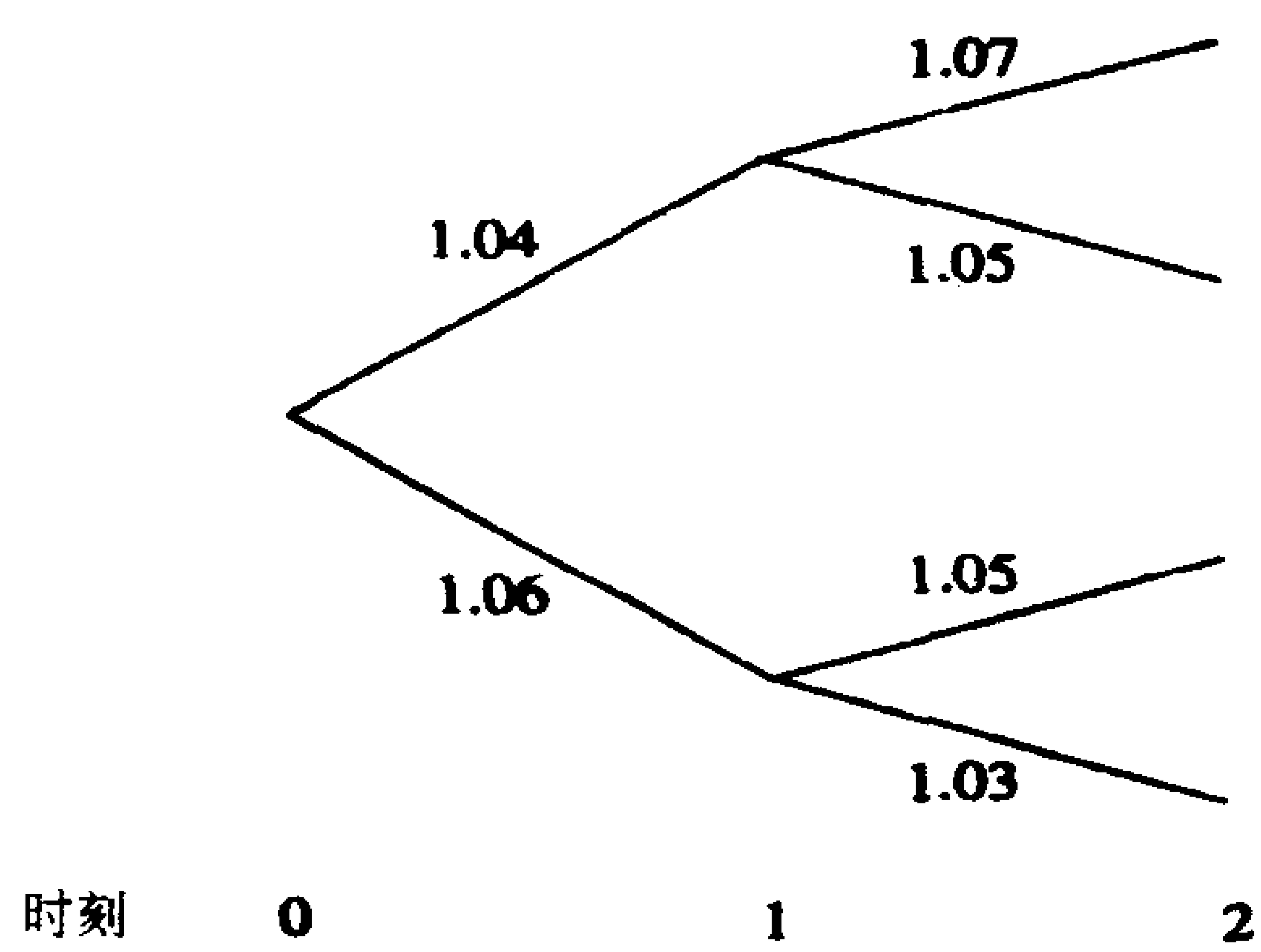


图 8-22 习题 1 的图

2. 图 8-23 给出一利率二叉树图，用倒向法为两年零息券定价. 假设所有分枝上的概率都是 1/2.

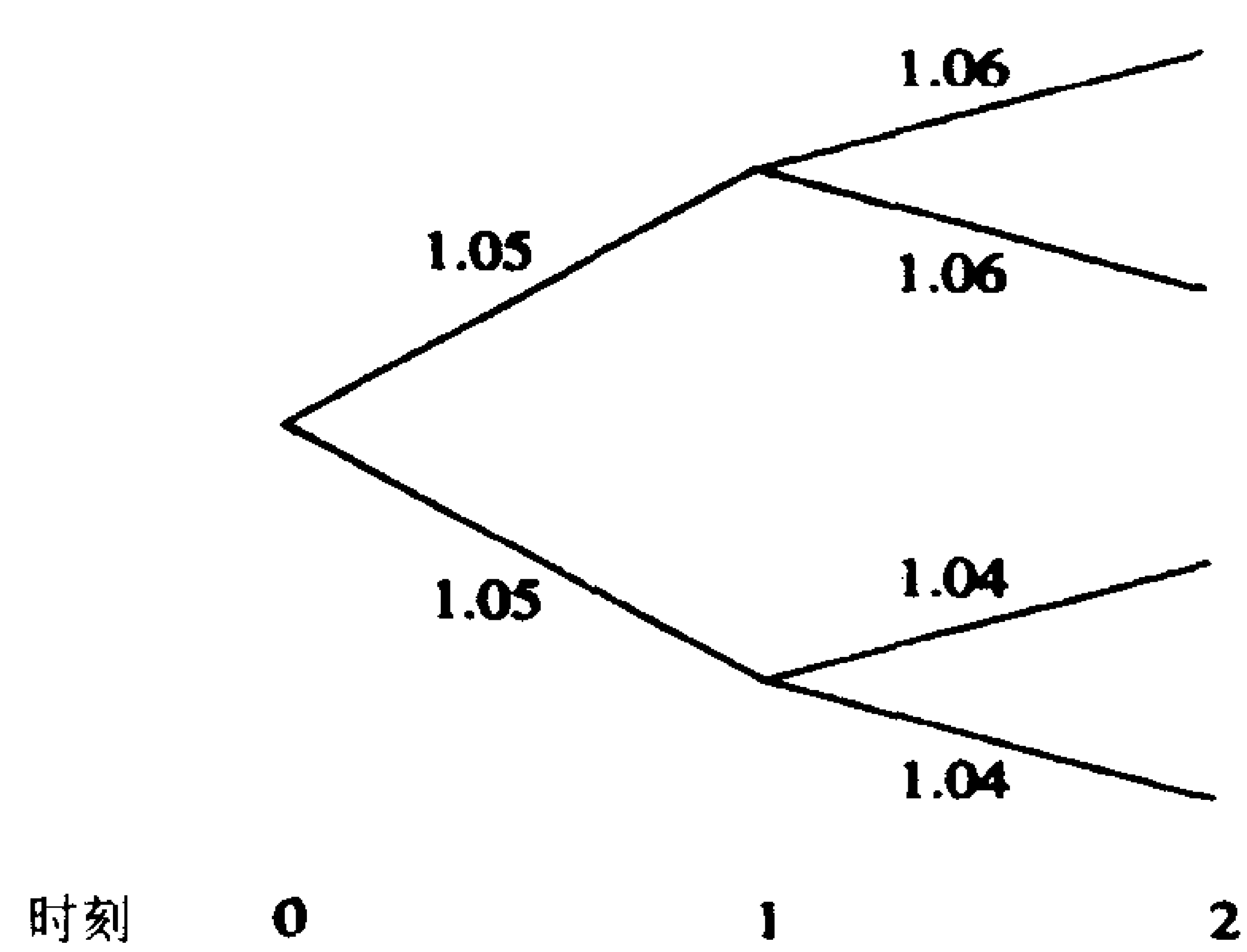


图 8-23 习题 2 的图

3. 对图 8-20 的利率二叉树图，证明当 $a=b$ 或 $c=d$ 时，时间段[0，1]内的利率为 $(a+b)/2$.

4. 给出图 8-21 中 a、b、c、d、σ 的值，

(a)用期望值法为两年零息券定价.

(b)找出时间段[0，1]内的“市场”利率. 169

5. 小时间段的期望值法和倒向法. 我们在前面曾提到这两种方法都适用于(近似地)小时间段. 让我们来看看为什么. 对图 8-24 的利率二叉树图，两期零息券的价格为：

$$P_E=\frac{1}{1+a\Delta t}\,\frac{1}{1+(b+c)\Delta t\times 2^{-1}}\quad 期望值法$$

$$P_B=\frac{1}{1+a\Delta t}\left[\frac{1}{1+b\Delta t}+\frac{1}{1+c\Delta t}\right]\times 2^{-1}\quad 倒向法$$

由于 $1/(1+a\Delta t)$ 在两个表达式中具有相同的作用，我们可以先不分析这项，而集中注意看其余的部分.

回忆下面公式：

$$\frac{1}{1+x}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k=1-x+x^2-x^3+\cdots$$

对于小量 x，我们可以省略两次项 x^2 或更高次的项. 所以 $1/(1+x)$ 可以近似为 $1-x$. 则 $P'_E\approx 1-\Delta t(b+c)/2$. 计算 P'_B 括号内的项，得到

$$\begin{aligned}P'_B&=\frac{1+\Delta t(b+c)/2}{(1+b\Delta t)(1+c\Delta t)}\\&\approx[1+\Delta t(b+c)/2](1-b\Delta t)(1-c\Delta t)\\&\approx(1+\Delta t(b+c)/2)(1-(b+c)\Delta t)\end{aligned}$$

把 $(\Delta t)^2$ 形式的项去除，得到：

$$\approx 1-\Delta t(b+c)/2$$

所以，如果我们忽略 $k\geqslant 2$ 以上的 $(\Delta t)^k$ 项时，P'_E 和 P'_B 与 P_B 和 P_E 是相同的.

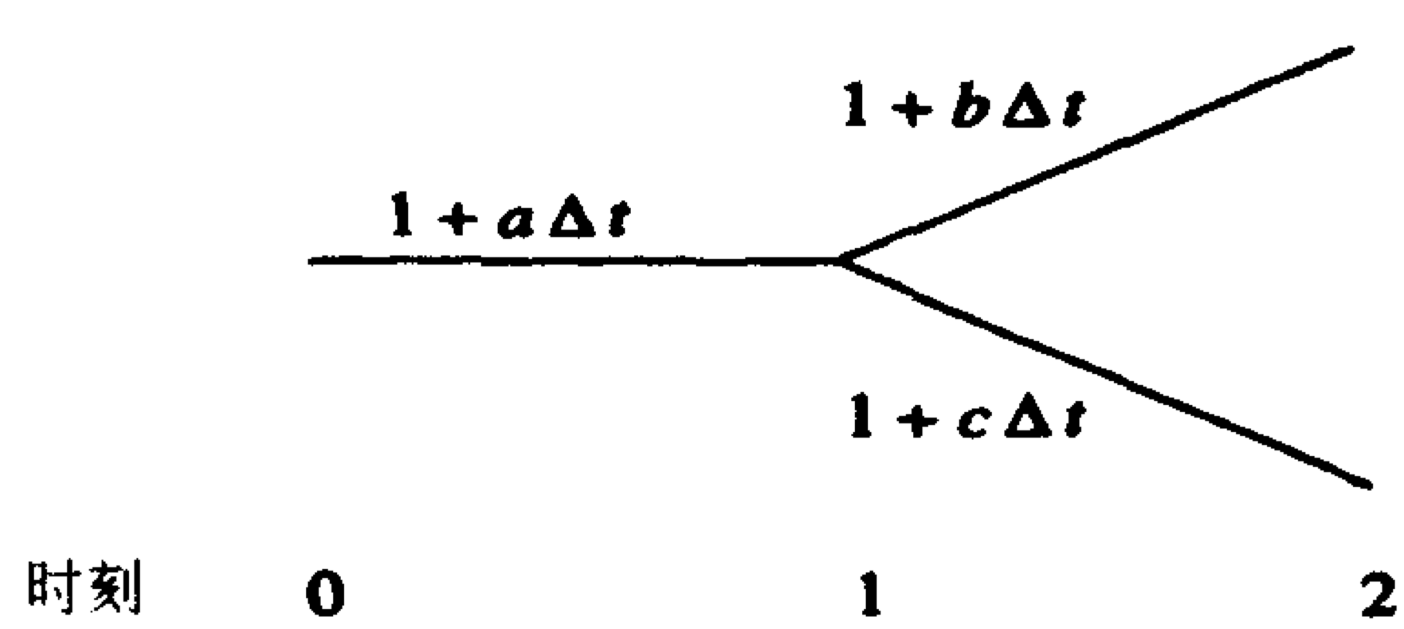


图 8-24 习题 5 的图

6. 让我们看看关于图 8-19 例子无套利的讨论. 假设你借了 0.50 美元来购买两年零息券. 在 $t=1$ 时，你卖出债券以偿还贷款. 在二叉树上枝，你的资金缺

少 1/6 美元(因为 $0.5-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$(美元)). 让我们再假设你能从第三方借 1/6 美元来还贷款. 你必须对你的贷款支付利息(利率为 $1+r=3$). 分别从两条分枝到达 $t=2$,找出你在 $t=2$ 时的头寸. 你会发现，如果你在 $t=0$ 时，净投资为 0，那么
170 在 $t=2$ 时你的预期净头寸也将是 0. 即再一次证明不存在套利.

8.5.5　连续时间模型

我们在众多的连续时间模型中选择两个进行讨论. 在这个节我们先介绍一般性的方法，然后再举一些特定的例子. 第一个简单的例子在运算上很简便，而第二个例子是 Vasicek 模型.

在下一节，我们将改变一下视角. 债券价格会成为关注的重点. 以价格为出发点，我们将从更广义的角度来研究由 DavidHeath、RobertJarrow 和 AndrewMorton 建立的 HJM 模型.

作为开始的第一步，我们希望能找到零息券的价格 $P(t,\ T)$的模型. 我们先回顾一下我们对期权的推导方法，在零息券的模型推导中将采用相同的方法.

第 6.4 节的回顾

1. 我们定义期权的价格为 $V(S,\ t)$，假设

$$\mathrm{d}S=\mu S\mathrm{d}t+\sigma S\mathrm{d}B \qquad B=\text{布朗运动}$$

2. 把 V 展开成幂级数，替换 $\mathrm{d}S$，并应用 Ito 定理，得到

$$\mathrm{d}V=\left[\frac{\partial V}{\partial t}+\mu S\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}\right]\mathrm{d}t+\sigma S\frac{\partial V}{\partial S}\mathrm{d}B$$

3. 我们引入资产组合 Π

$$\Pi=V-\Delta S+C$$

或

$$\Pi=\phi S+C$$

这里的 C 表示现金. 通过对 Δ 的选择，我们可以消除 $\mathrm{d}B$ 项.

4. 接着我们调用套利来得到微分方程

$$\frac{\partial V}{\partial t}+rS\frac{\partial V}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2V}{\partial S^2}-rV=0$$

5. 解出该微分方程.

8.5.6　债券价格模型

我们会用同样的方法来给出债券价格的模型.

步骤一

假设我们的债券价格 $P(t,\ T)$只受到 T(到期时间)，t 和短期利率 $r(t)$的影

响. 我们对 $r(t)$ 运用模型:

$$dr = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dB$$

这里 B 指布朗运动. 171

步骤二

我们把 $P(t,T)$ 对 t 和 r 展开成幂级数,替换 dr 并运用 Ito 定理,得到

$$dP(t,T) = \left(\mu \frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2 \frac{\partial^2 P}{\partial r^2} + \frac{\partial P}{\partial t}\right)dt + \sigma \frac{\partial P}{\partial r}dB \tag{8-35}$$

把该式简化为

$$dP(t,T) = u(t,T)dt + v(t,T)dB$$

注意: μ 和 u 是不同的.

步骤三 资产组合

现在怎么做呢?我们不能把购买利率来作为消除价格不确定性的方法.(事实上,我们可以把 r 看作特别的资产来购买,但实际市场上这样的金融工具却不多见.),但我们可以购买不同到期日的零息券——T_1 和 T_2. 我们的资产组合为:

$$\Pi = P_1 - \Delta P_2 + C$$

$$d\Pi = dP_1 - \Delta dP_2 + rCdt$$

$$P_1 = P(t,T_1)$$

$$P_2 = P(t,T_2)$$

$$C = \text{现金}$$

分别把 dP_1 和 dP_2 的公式(8-35)的简化式代入,得

$$d\Pi = (u_1 - \Delta u_2)dt + (v_1 - \Delta v_2)dB + rCdt$$

如果令

$$\Delta = \frac{v_1}{v_2}$$

则 dB 项消失了!因此:

$$d\Pi = (u_1 - \Delta u_2)dt + rCdt$$

现在

$$C = \Pi - (P_1 - \Delta P_2)$$

所以我们替代现金项,得到另外一个表达式:

$$d\Pi = (u_1 - \Delta u_2)dt + r\left(\Pi - P_1 + \frac{v_1}{v_2}P_2\right)dt \tag{8-36}$$

步骤四 应用无套利原则

在看(8-36)时我们注意到 dB 项已经消失了,这样 Π 随时间的变动将是平稳的. 由于 Π 可以看作是货币市场工具,它的收益率必定与利率相匹配:

172 $$d\Pi = r(t)\Pi dt$$

这些项在公式(8-36)中出现，并抵消．所以式子变为

$$0 = \left(u_1 - \frac{v_1}{v_2}u_2\right) + r\left(-P_1 + \frac{v_1}{v_2}P_2\right)$$

即：

$$0 = u_1 - rP_1 - \frac{v_1}{v_2}(u_2 - rP_2)$$

重新整理等式，得到

$$\frac{1}{v_1}(u_1 - rP_1) = \frac{1}{v_2}(u_2 - rP_2)$$

现在等式左边只包含 T_1，而等式右边只包含 T_2，所以：

$$\lambda(t,r) = \frac{u(t,T) - r(t,T)P(t,T)}{v(t,T)} \tag{8-37}$$

与 T 无关．λ 称为风险价格，我们过会儿将提到它．我们可以把 λ 项改写成

$$u(t,T) = rP(t,T) + \lambda v(t,T)$$

现在，采用方程(8-35)中 u 和 v 的表达式，然后使漂移项相等，我们得到债券价格的微分方程

$$\frac{\partial P}{\partial t} + \mu\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = rP + \lambda\sigma\frac{\partial P}{\partial r}$$

我们把它写成

$$\frac{\partial P}{\partial t} + (\mu - \lambda\sigma)\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \tag{8-38}$$

价格偏微分方程的到期边界条件为 $P(T, T)=1$.

(8-38)式看上去很像 Black-Scholes 偏微分方程．它们都是抛物线型的偏微分方程．然而，(8-38)比 Black-Scholes 方程更具有一般性，因为 μ 和 σ 是关于 r 和 t 的函数，而不是常数．当我们给定一些初始条件后，就会得到 Black-Scholes 方程，并有一个惟一的解．相反，方程(8-38)有许多不同的解，视我们选择的 $r(t)$ 和初始条件不同而决定.

步骤五　方程给出后的进一步求解

关于 r 的一般模型如下：

$$dr = \mu(r,t)dt + \sigma(r,t)dB$$

如果我们确定 μ、σ 和 λ，我们就能在这些特定条件下得到(8-38)的解．有些时候
173 我们不能给出这些参数下的解析解，但我们可以用计算方法得出近似解.

8.5.7　一个简单的例子

在这个例子中，我们假设短期利率满足

$$dr = \mu dt + \sigma dB \tag{8-39}$$

这里参数 μ 和 σ 都是常数．由于参数是常数．我们可以解出(8-39)里的 r，得到

$$r(t) = r_0 + \mu t + \sigma B_t \tag{8-40}$$

在本例中，债券价格的偏微分方程除了两项外具有不变的系数．从(8-38)可以看出，这两项为

$$[\mu - \lambda(t,r)\sigma]\frac{\partial P}{\partial r} \quad 和 \quad -rP$$

如果 λ 也是常数的话，偏微分方程将能很容易得到解决．让我们假设风险价格也是常数．这种假设符合实际吗？也许不，但这种简化方法能使我们间接找到最优的常数参数，从而估计近期的债券价格．

为了求解偏微分方程，我们可以假设 $\mu-\lambda\sigma=a$ 是一未知常数．我们希望解以下方程

$$\frac{\partial P}{\partial t} + a\frac{\partial P}{\partial r} + \frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} - rP = 0 \tag{8-41}$$

注意方程(8-41)比 Black-Scholes 方程更简单．

试解一

让我们从方程(8-41)中 P 的试解开始，设

$$P = e^{Ar}$$

这里 A 是某一常数．该解是否正确？下面进行验算：

$$\frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = Ae^{Ar}$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2} = A^2e^{Ar}$$

把这些公式代入(8-41)，得到

$$0 + aAe^{Ar} + \frac{1}{2}\sigma^2A^2e^{Ar} - re^{Ar} = 0$$

消去指数项，得

$$aA + \frac{1}{2}\sigma^2A^2 - r = 0$$ 174

能不能找到一个常数 A 使等式左边为零呢？不能．方程中所有其他项为常数，而 r 是变量．所以这不是方程的解．

试解二

让我们把 P 设得稍微复杂一点，设

$$P = \exp[A(t)r + B(t)]$$

这里 $A(t)$ 和 $B(t)$ 只受 t 影响．该解又是否正确？下面再进行验算：

$$\frac{\partial P}{\partial t} = (A'r + B')\exp[A(t)r + B(t)] = (A'r + B')P$$

$$\frac{\partial P}{\partial r}=AP$$

$$\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}=A^2P$$

代入(8-41)，得

$$(A'r+B')P+aAP+\frac{1}{2}\sigma^2A^2P-rP=0$$

像上次一样，我们消去 P 项，得到

$$A'r+B'+aA+\frac{1}{2}\sigma^2A^2-r=0$$

现在我们得到关于 r 的常数和其他项的多项式，如果我们取

$$A'=1$$

那么 r 项将消去，而我们可以根据 $B'+aA+\frac{1}{2}\delta^2A^2=0$ 得到解．当然，A 只是 $t+C$,C 是某一常数．我们取

$$A(t)=t-T$$

T 是到期日．这使我们的解的形式变为：

$$P=\exp[(t-T)r+B]$$

这样，在到期日 $P=1$．我们同时希望 $B(T)=0$，但由于

$$B'=-aA-\frac{1}{2}\sigma^2A^2=-a(t-T)-\frac{1}{2}\sigma^2(t-T)^2$$

积分可得

$$B(t)=-\frac{a}{2}(t-T)^2-\frac{\sigma^2}{6}(t-T)^3=-\frac{a}{2}(T-t)^2+\frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3$$

175 这样我们得到了最终解.

债券价格

之前的计算表明

$$P(t,T)=\exp\left[-(T-t)r-\frac{a}{2}(T-t)^2+\frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3\right] \tag{8-42}$$

是当 μ 和 σ 为常数时债券价格的特殊解.

如果我们输入利率，那么这个简单的公式将给出债券理论价格．假设我们得到了参数 a 和 σ 估计的“正确值”，那么在任何时间 t，只要我们根据实际市场得到短期利率，把它代入等式(8-42)，便可知道在那天的“理论”价格.

使用这种预期方法必须注意两点．第一，只能计算出相同日期的价格．由于未来利率的值是不确定的，所以(8-42)对预期未来债券价格的帮助是有限的.

第二，我们的模型把所有的债券价格直接与短期利率联系起来．这种债券价格的估计方法是不精确的.

例 假设我们对美国债券市场建立模型. 选择 $a=0.005$ 和 $\sigma=0.03$. 我们知道今天的利率是 $r=0.052$. 那么 5 年和 10 年的零息券的今日价格分别是多少? 这些债券的当前收益率是多少?

解 在(8-42)中, 价格只受到到期日的影响, 我们在(8-42)中取 $T-t=5$ 和 $T-t=10$.

5 年债券:

$$-5\times 0.052-\frac{0.005}{2}\times 5^2+\frac{0.03^2}{6}\times 5^3=-0.30375$$

所以 $P(t, t+5)=e^{-0.30375}=0.738$. 就是说, 一张面值为 1000 美元的 5 年债券今天的价格应该是 738 美元. 它的当前收益率是 0.30375/5=0.0607, 持有至到期日的年收益率是 6.07%.

10 年债券:

$$-10\times 0.052-0.0025\times 10^2+0.00015\times 10^3=-0.62$$

所以 $P(t, t+10)=e^{-0.62}=0.538$. 就是说, 一张面值为 1000 美元的 10 年债券今天的价格应该是 538 美元. 它的当前收益率是 0.62/10, 持有至到期日的年收益率是6.2%.

简单模型的基准

如果我们希望对一个特定的债券市场建立模型, 我们怎样来选择参数 a 和 σ 呢? 我们设基准日为 $t=0$, 观察市场收益率曲线. 为了使我们的模型与市场收益率曲线一致, 按如下两步进行:

第 1 步 模拟的收益率曲线每个零息券都有一当前收益 $Y(t)$, 这可以从当前市场价格中计算出来的(可参考本章 1.4 节或公式(8-1))

$$Y(t)=\frac{-\ln(P)}{T-t}$$ 176

在本节简单的例子中,

$$\ln(P)=-(T-t)r-\frac{a}{2}(T-t)^2+\frac{\sigma^2}{6}(T-t)^3$$

所以

$$Y(t,T)=r(t)+\frac{a}{2}(T-t)-\frac{\sigma^2}{6}(T-t)^2$$

第 2 步 拟合初始收益率曲线采用步骤 1 中得到的模拟的收益率曲线模型对初始收益率曲线进行拟合, 得到:

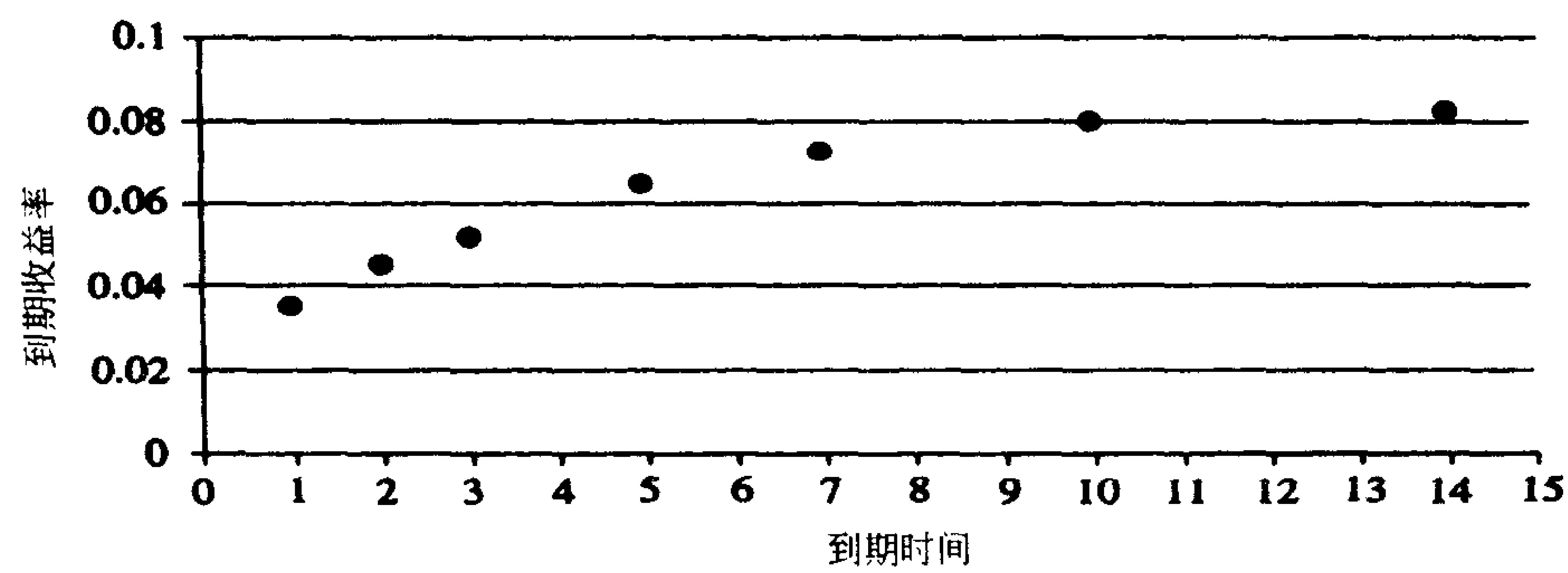
$$Y(0,T)=r_0+\frac{a}{2}T-\frac{\sigma^2}{6}T^2$$

但我们可以观测当天的实际市场数据. 比如, 一曼谷报纸报导, 在 1999 年 11 月 26 日, 中央银行的债券收益为

期限	收益率
1-年	3.51
2-年	4.54
3-年	5.21
5-年	6.46
7-年	7.26
10-年	7.99
14-年	8.30

我们用模拟的收益率曲线来拟合这些点．图 8-25 是所公布收益率的散点图．由拟合度最好的“最小二乘法”得到的二次多项式为：

$$Y = 0.02803 + 0.00892T - 0.00036T^2$$



177

图 8-25 泰国银行收益率

该收益率回归公式的图为图 8-26．这条曲线可以用处理多项式回归的软件来计算．如，Excel 给出了图 8-10 的图．

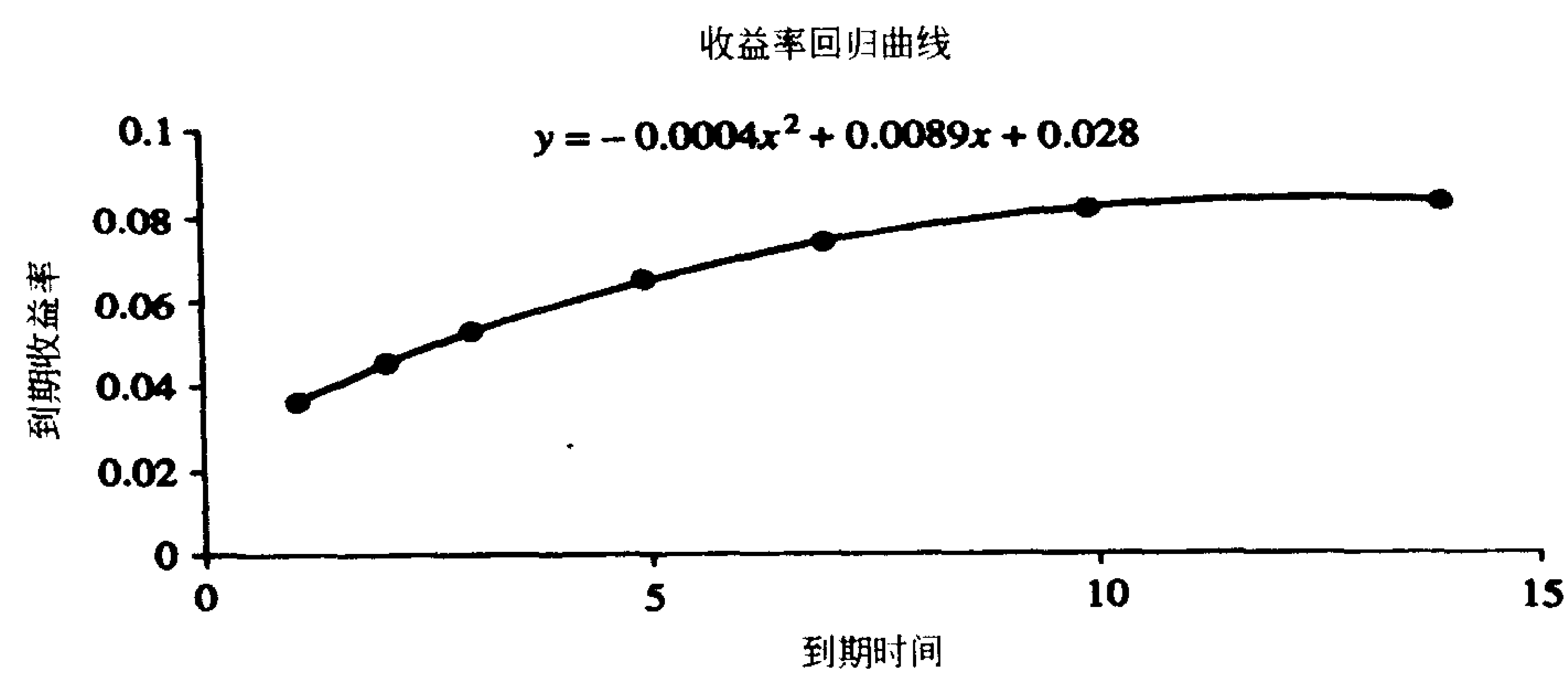


图 8-26 泰国银行收益率回归曲线

回归的系数就是 a 和 σ，所以债券的价格变为

$$P(t,T)=\exp[-(T-t)r-0.00892(T-t)^2+0.00036(T-t)^3]$$

这个公式再加上下面的短期利率公式

$$r(t)=at+\sigma B_t$$

就可以用来计算利率期权的价格.

8.5.8 Vasicek 模型

在 Vasicek 形式的利率模型中:

$$\mathrm{d}r=\alpha(\beta-r)\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B$$

可以看到我们从极简单的模型 $\mathrm{d}r=\mu\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B$(这里的 μ 和 σ 都是常数),转向一个较复杂的模型.

这种模型被称为"均值反转",因为 $\alpha(\beta-r)$ 项迫使 r 在该项逐渐减少的过程中越来越接近 β,而 α 决定了它趋近 β 的速度. 与上一节模型一样,σ 是波动率. 为了应用 Vasicek 模型,我们假设风险价格 $\lambda(t,r)$ 是变量 r 的线性函数. 那么(8-38)中的非常数系数项为

$$\alpha(\beta-r)-\lambda\sigma$$

其形式也可写成:

$$a(b-r)$$ 178

Vasicek 债券方程

在这个模型下,方程(8-38)有以下形式

$$\frac{\partial P}{\partial t}+a(b-r)\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{1}{2}\sigma^2\frac{\partial^2 P}{\partial r^2}-rP=0 \tag{8-43}$$

像上一节的简单模型一样,我们希望债券价格可以写成

$$P(t,T)=\mathrm{e}^{A(t,T)r+B(t,T)} \tag{8-44}$$

可以证明

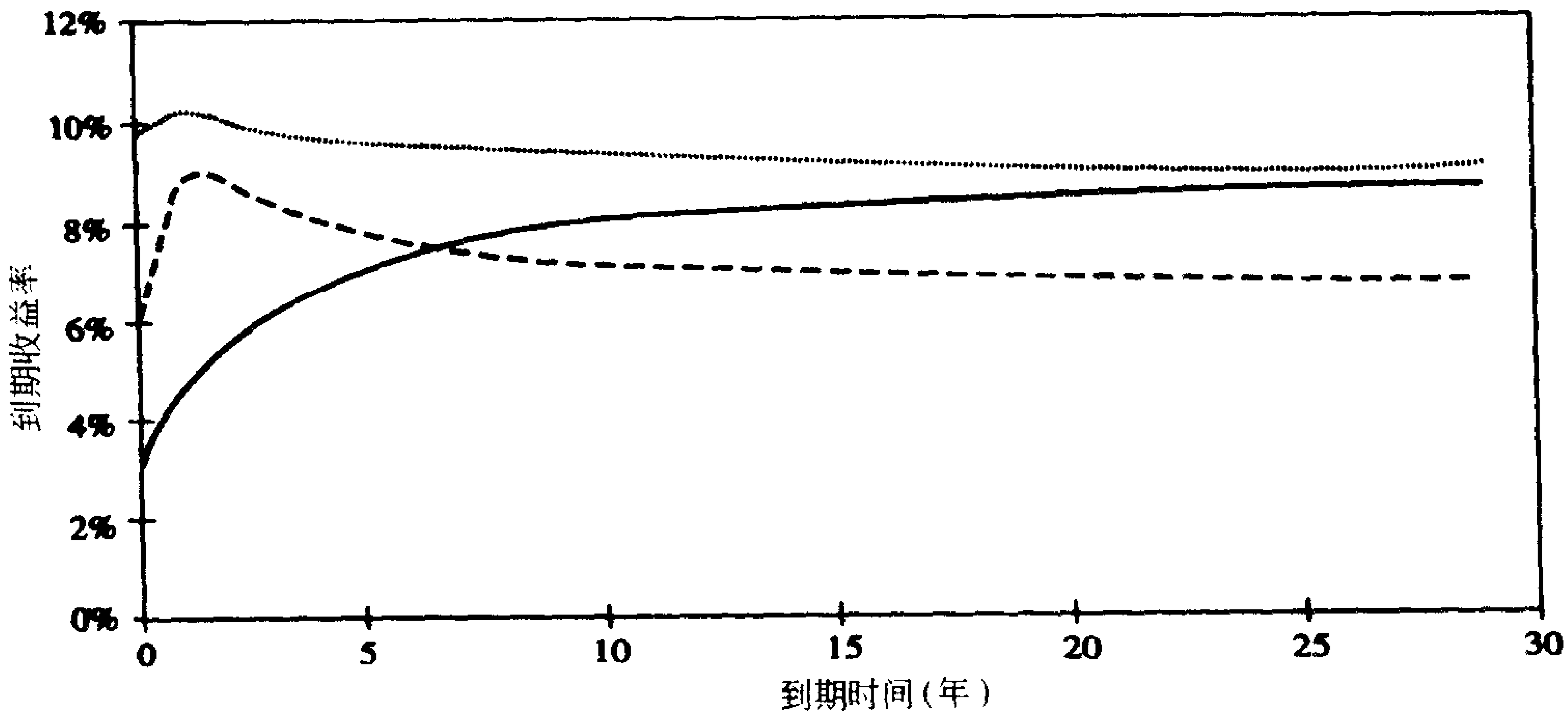
$$A(t,T)=-\frac{1}{a}(1-\mathrm{e}^{-a(T-t)})$$

和

$$B(t,T)=\frac{(-A(t,T)-T+t)(a^2b-\sigma^2/2)}{a^2}-\frac{\sigma^2A(t,T)^2}{4a}$$

这里我们有三项常数,a、b 和 σ,这些都是由市场数据决定的. 我们得到基准日期的收益率曲线并用 $t=0$ 时的模拟的收益率来拟合实际收益率曲线. 这样就可以间接确定 a、b 和 σ. 建模的这一环节与其说是科学到不如说是一种艺术. 你一定希望能通过实证检验并调试出参数,从而使所得到的 $P(t,T)$ 曲线能很好地反映你对市场的直觉.

注意 虽然我们只有三个参数 a、b 和 σ 可以变化,但我们仍可以得到许多不同的利率曲线. 图 8-27 给出了几种可能.



179 图 8-27 Vasicek 收益率曲线

习题

1. 证明当式(8-44)中的 $A(T, T)=0$ 时 $B(T, T)=0$，且 $P(T, T)=1$.

2. Vasicek 模型可以在没有均值反转的情况下使用，即当 $a=0$ 时．这样(8-44)中就有零分母．如果 a 接近于 0，那么 $A(t, T)\approx t-T$．找出当 $a\to 0$ 时 $B(t, T)$的近似值.

8.6 债券动态价格

Vasicek 的例子说明一个特定的短期利率模型可以计算出债券的价格．我们也可以反过来分析，即首先确定一个债券的模型再来计算利率.

怎么来直接确定债券的价格呢？我们必须先对债券价格的变化建立模型．让我们看看 8.5 节中债券价格动态的例子，我们会发现它们很像股票模型里的动态.

首先回到 8.5 节中五个步骤的过程，在第二步中有一个零息券价格 $P(t, T)$ 的微分方程：

$$\mathrm{d}P(t,T) = u(t)\mathrm{d}t + \sigma \frac{\partial P}{\partial r}\mathrm{d}B$$

在第四步中，我们得到 $u=rP+\lambda\sigma\,\partial P/\partial r$，所以

$$\mathrm{d}P(t,T) = \left(rP + \lambda\sigma \frac{\partial P}{\partial r}\right)\mathrm{d}t + \sigma \frac{\partial P}{\partial r}\mathrm{d}B$$

债券微分方程中有两项包含 $\partial P/\partial r$，这是我们不愿看到的，但我们可以消去它．在 8.5 节两个例子中我们都假设了债券价格的特殊解：

$$P(t,T) = \exp[A(t,T)r + B(t,T)]$$

我们很容易得出 $\partial P/\partial r$：

$$\partial P/\partial r = A(t,T)\exp[A(t,T)r + B(t,T)]$$
$$= A(t,T)P(t,T)$$

这样不需要任何求偏导数就可得到：

$$dP = \{r + \lambda\sigma A\}P\,dt + \sigma AP\,dB \tag{8-45}$$

$P(t,\ T)$是(8-45)中的主要项，而 λ、σ 和 r 都属于参数.

这个方程是债券价格的动态方程. 它基本上以债券自身属性来表示债券价格的变化. 可变的利率 r 和风险价格 λ 仍然在式中出现. 然而，读者可以比较一下方程(8-45)和几何布朗运动股票模型中的方程(5-1). 除了有一些相似之处外，债券的式子更为复杂. 180

波动系数：与几何布朗运动股票模型不同的是，债券的波动不是不变的. 它的波动率 $\sigma A(t,\ T)$由 t 决定. 从方程(8-44)可以看到在 Vasicek 模型中

$$\sigma A(t,T) = -\frac{\sigma}{a}(1 - e^{-a(T-t)})$$

易知在 $t=0$ 时，债券的波动率是最大的，而在到期日它就消失了.

波动率取决于时间使得债券模型具有现实意义. 随着到期日的到来，价格趋近于面值. 而在到期日之前，债券交易有很大的波动，看上去很像股票.

漂移系数：与几何布朗运动股票模型不同，债券率的漂移也不是不变的常数. 最主要的原因是是短期利率——它随时间而变化.

有一种模型可以简化漂移率的表达方式. 这种"模型修正选择"同样适用于第 5 章的几何布朗运动股票模型.

债券漂移率的简化形式

与第 8.5 节中介绍的一样，模型修正时也必须选择参数 λ、a、b 和 σ. 在每种情况下，我们假设风险价格 $\lambda(t)$可以通过调整其他参数而设为 0.

采用这种方法对方程(8-45)中的参数进行修正，我们可以把债券动态表达成一种简单且仍具有一般性的形式：

债券价格

$$dP(t,T) = r(t)P(t,T)dt + \sigma(t,T)P(t,T)dB(t) \tag{8-46}$$

我们把波动率函数 $\sigma A(t,\ T)$简化为 $\sigma(t,\ T)$. 这个波动率函数是决定一个债券模型最重要的参数. 简化形式 $\sigma(t,\ T)$除了 Vasicek 公式外，在其他模型中也常被用到，但这些模型都是相当复杂的.

方程(8-46)的意义是什么呢? 它是债券价格的一个微分方程. 我们可以解出微分方程，然后再进一步求解使它符合特定的初始条件.

对于债券，我们可以根据市场观测到初始条件，比如在 $t=0$ 时通过收益率曲线，我们就可以知道零息券的实际价格. 这些价格构成初始条件下的利率期限结构.

方程(8-46)让我们可以找到一个模型，使得它与我们所观察的各种到期日债

券的基准日价格相吻合．如果使用短期利率模型的方法我们便不能做到这一点．比如，用 Vasicek 模型只能得到收益率曲线近似的拟合曲线．

8.7 债券价格公式

有没有一个债券模型可以精确地拟合现有的期限结构？一种很有效的方法便是用公式(8-46)表示的动态债券价格方程，然后再试着解方程．虽然公式中包含
181 未知的漂移系数 $r(t)$，但我们可以先忽略该项，然后再求解．

步骤一　lnP 的微分

方程(8-46)给出了当 t 变化时，$\ln P(t,\ T)$的变动，我们知道：

$$\frac{\partial \ln P}{\partial P}=\frac{1}{P} \quad 及 \quad \frac{\partial^2 \ln P}{\partial P^2}=-\frac{1}{P^2}$$

然后，我们对 $\ln P$ 展开成一阶项和二阶项的形式：

$$\mathrm{d}\ln P \approx \frac{1}{P}\mathrm{d}P-\frac{1}{2P^2}(\mathrm{d}P)^2$$

方程(8-46)表明 $\mathrm{d}P$ 项的因子包括：

$$\mathrm{d}P = rP\mathrm{d}t+\sigma P\mathrm{d}B \quad 及 \quad (\mathrm{d}P)^2=\sigma^2P^2\mathrm{d}t \quad （根据 Ito 定理）$$

把这些项合并起来，得到

$$\mathrm{d}(\ln P)=\{r-\sigma^2/2\}\mathrm{d}t+\sigma\mathrm{d}B \tag{8-47}$$

步骤二　消去 r 并求出 lnP

现在让我们来解(8-47)，并得到 $\ln P$．由于 $r(t)$是未知的，所以我们的求解过程尚未完成．但我们将(8-47)中的各项积分，得

$$\ln P(t,T)-\ln P(0,T)=\int_0^t r(s)\mathrm{d}s-\frac{1}{2}\int_0^t\sigma^2(s,T)\mathrm{d}s + \int_0^t\sigma(s,T)\mathrm{d}B(s) \tag{8-48}$$

在(8-48)中 T 可以取任何值，但当 $T=t$ 时我们会有意外的收获．我们知道 $P(t,\ t)=1$，所以这时等式(8-48)的左边是一个已知的常数．

这样我们就得到了本来未知的 $r(s)\mathrm{d}s$ 项的公式：

$$\int_0^t r(s)\mathrm{d}s=-\ln P(0,t)+\frac{1}{2}\int_0^t\sigma^2(s,t)\mathrm{d}s-\int_0^t\sigma(s,t)\mathrm{d}B(s)$$

我们把它代入(8-48)就可以得到：

$$\ln P(t,T)=\ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)}+\frac{1}{2}\int_0^t\{\sigma^2(s,t)-\sigma^2(s,T)\}\mathrm{d}s + \int_0^t\{\sigma(s,T)-\sigma(s,t)\}\mathrm{d}B(s)$$

步骤三　债券价格

前面的公式是 $\ln P$ 的公式，所以债券价格可以写成指数公式：

债券价格

$$P(t,T)=\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t(\sigma^2(s,t)-\sigma^2(s,T))\mathrm{d}s\right.$$
$$\left.+\int_0^t(\sigma(s,T)-\sigma(s,t))\mathrm{d}B(s)\right] \tag{8-49}$$

读者也许会问："这个答案有什么用处呢?"我们可以把(8-49)设想成三部分组成，第一个是

$$\frac{P(0,T)}{P(0,t)}$$ 182

这一项比较简单，因为我们在建立模型的时候应知道基准日的债券价格. 第二个部分是

$$\exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t(\sigma^2(s,t)-\sigma^2(s,T))\mathrm{d}s\right]$$

我们只要选择了一个$\sigma(s, T)$，积分就能简化成一个公式. 我们根据什么来选择函数$\sigma(s, T)$呢? 答案是债券交易的波动率. 我们必须根据交易数据来选择.

第三个组成部分是

$$\exp\left[\int_0^t(\sigma(s,T)-\sigma(s,t))\mathrm{d}B(s)\right]$$

这个部分总是随机的，这样就存在了一个问题：一项随机的其他因子的价格怎么用来定价的呢? 这里有两种方法：

- 其他因子的价格是随机的，而债券价格是直接取决于这些价格. 比如，短期利率可看作是随机的. 在 Vasicek 的例子中，债券价格是与短期利率相关的. 如果你知道其中一个的话，就能计算出其他的.
- 我们可以利用一个随机的因子和连锁的方法来找到另外的价格. 比如，一个债券的看涨期权在该债券到期前是一项衍生产品，方程(8-49)可以用来计算看涨期权的价格.

8.8 债券价格、即期利率和 HJM 模型

在前两节，短期利率 $r(t)$虽然在基本的方程中出现但是被忽略的. 但当我们建立债券模型时，就存在一个短期利率，因为

$$P(t,t+\Delta t)\approx \mathrm{e}^{-r(t)\Delta t}$$

我们可以通过对公式(8-49)求导，来计算短期利率.

短期利率

$$r(t)=-\frac{\partial \ln P}{\partial T}(t,T)\Big|_{T=t} \tag{8-50}$$

我们后面会举例来解释这一关系. 注意我们在 8.6 节已经知道了通过债券价格再计算相短期利率的方法. 这也是下面介绍的 Heath、Jarrow 和 Morton 期限

结构模型的根本特征.

在 HJM 方法中，通过选择远期利率的波动率来确定方程(8-49)，同时短期
183 利率也通过这些波动率来计算出来.

Hull-White 模型应用的例子

为了解释 $P(t,\ T)$和 $r(t)$之间的关系，我们设定一个满足下面关系式的波动率：

$$\sigma(t,T)=\frac{\sigma}{a}(1-e^{-a(T-t)})$$

这就是 Vasicek 例子中将出现的波动率. 然而，$P(t,\ T)$和 $r(t)$都不同于 Vasicek 公式，因为我们还要使模型恰好满足给定的初始期限结构条件.

债券价格

首先，我们计算(8-49)中的三项，以得到 $\ln P$. 关键的积分是

$$\int_0^t \sigma^2(s,T)\mathrm{d}s=\frac{\sigma^2}{a^2}[t+D(t,T)-D(0,T)]+\frac{\sigma^2}{2a}[D(t,T)^2-D(0,T)^2]$$

和

$$\int_0^t \sigma(s,T)\mathrm{d}B=\frac{\sigma}{a}\left[B(t)-e^{-aT}\int_0^t e^{as}\mathrm{d}B\right]$$

在积分的第一项中 D 表示

$$D(t,T)=\frac{1}{a}(1-e^{-a(T-t)}) \tag{8-51}$$

也就是说第一项积分是一些指数项的和. 事实上，我们可以把第一项积分简写成 $C(t,\ T)$，即

$$C(t,T)=\int_0^t \sigma^2(s,T)\mathrm{d}s \tag{8-52}$$

该项是一些指数项的和. 根据(8-49)，

$$\begin{aligned}\ln P=&\ln P(0,T)-\ln P(0,t)+\frac{1}{2}\{C(t,t)-C(t,T)\}\\&+\frac{\sigma}{a}\left[e^{-at}\int_0^t e^{as}\mathrm{d}B-e^{-aT}\int_0^t e^{as}\mathrm{d}B\right]\\=&\ln P(0,T)-\ln P(0,t)+1/2\{C(t,t)-C(t,T)\}\\&+\frac{\sigma}{a}[e^{-at}-e^{-aT}]\int_0^t e^{as}\mathrm{d}B\end{aligned} \tag{8-53}$$

注意到在这些债券价格中惟一不确定的项是下面的(随机)表达式

184

$$\int_0^t e^{as}\mathrm{d}B(s)$$

$\ln P(0,\ \cdot)$项是已知常数，因为它们是可以被观察到的基准日的债券市场价格. 应注意 $r(t)$表达式中仍将出现随机项. 现在我们可以根据(8-53)写出债券价格的公式

$$P(t,T)=\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp\left[C(t,t)/2-C(t,T)/2+\sigma D(t,T)\mathrm{e}^{-at}\int_0^t \mathrm{e}^{as}\,\mathrm{d}B\right] \tag{8-54}$$

这里的 $C(t,\ T)$和 $D(t,\ T)$是分别可以通过公式(8-51)和(8-52)计算的确定项.

短期利率

式(8-50)表明通过对(8-54)取负对数并求导可以得到 r. 因为导数是关于变量 T，因此只含 t 的项可以去掉，得到

$$\frac{\partial\ \ln P}{\partial\ T}=\frac{\partial\ \ln P}{\partial\ T}(0,T)-\frac{1}{2}\ \frac{\partial\ C}{\partial\ T}(t,T)+\sigma\mathrm{e}^{-aT}\int_0^t \mathrm{e}^{as}\,\mathrm{d}B$$

我们设 $T=t$ 得到 r，于是我们得到一个半确定的表达式

$$r(t)=-\frac{\partial\ \ln P}{\partial\ T}(0,t)+\frac{\sigma^2}{4a^2}D^2(0,t)-\sigma\mathrm{e}^{-at}\int_0^t \mathrm{e}^{as}\,\mathrm{d}B \tag{8-55}$$

与债券价格公式一样时，r 中惟一的随机项是我们熟悉的：

$$\int_0^t \mathrm{e}^{as}\,\mathrm{d}B(s)$$

但这个随机项在(8-54)和(8-55)两式中都出现，所以我们可以用 r 替代.

首先，我们重新整理(8-55)，得

$$\sigma\mathrm{e}^{-at}\int_0^t \mathrm{e}^{as}\,\mathrm{d}B=-\frac{\partial\ \ln P}{\partial\ T}(0,t)+\frac{\sigma^2}{4a^2}D^2(0,t)-r(t)$$

用该式代替债券价格里的随机项，这样我们将得到一个简洁的公式：

$$\begin{aligned}P(t,T)=&\frac{P(0,T)}{P(0,t)}\exp[C(t,t)/2-C(t,T)/2]\\&\times\exp\left[-r(t)D(t,T)-D(t,T)\frac{\partial\ \ln P}{\partial\ T}(0,t)\right.\\&\left.+\frac{\sigma^2}{4a^2}D^2(0,t)D(t,T)\right]\end{aligned} \tag{8-56}$$

像我们以前提过的一样，这里的 $C(t,\ T)$和 $D(t,\ T)$分别是在(8-51)和(8-52)出现的简单的公式形式.

式(8-56)中有三项可以在基准日观测到. 表达式 $P(0,\ T)$和 $P(0,\ t)$是 $t=0$ 时的债券市场价格，它们分别与基准日的收益率曲线上相对应的不同到期日有关. 而且(8-56)中的表达式

$$-\frac{\partial\ \ln P(0,t)}{\partial\ T}$$ 185

也可以简单地通过基准日观测到的远期利率得到. 读者可以参考(8-10)来回顾一下远期利率与债券价格之间的关系.

每个债券价格都只有一个随机项：短期利率. 它的"市场价值"决定了每个债券的价格，而其他的系数是时间 t 的特定函数. Hull-White 模型有时被认为是扩展的 Vasicek 模型，因为在两个模型中债券具有相同的波动率.

当我们在确定基准日模型的时候，只需要短期利率 $r(t)$的现在价值，就可以

预期在任何时刻 t 的债券价格.

HJM 模型应用注意事项

债券公式(8-49)对很多 $\sigma(t, T)$ 的形式都适用. 我们上面举的例子做了特别的选择，使得债券价格直接取决于 $r(t)$. 然而，选择其他的 $\sigma(t, T)$ 会产生更复杂的债券价格. 在有些 HJM 模型中，债券价格取决于历史价格，而不是现在的价格.

接下来的习题中，我们假设债券波动率是确定的. 这样，我们可以简单地计算出债券价格. 然而，有时候债券价格是由整个短期利率的历史记录决定的，比如，$\sigma=\sqrt{T-t}$.

习题

1. 假设有一债券模型采用 $\sigma(t, T)=T-t$ 决定债券波动率. 利用公式(8-49)证明

$$r(t)=-\frac{\partial \ln P}{\partial T}(0,t)+\frac{t^2}{2}-B(t)$$

2. 证明习题 1 中的债券模型在时间 t 有以下收益率曲线

$$Y(t)=\frac{-1}{T-t}\ln\frac{P(0,T)}{P(0,t)}-\frac{tT}{2}-B(t)$$

提示：$Y=-\ln P/(T-t)$

3. 假设有一债券模型采用债券波动率 $\sigma(t, T)=t(T-t)$. 利用公式(8-49)证明

$$r(t)=-\frac{\partial \ln P}{\partial T}(0,t)+\frac{t^4}{12}-\int_0^t s\mathrm{d}B(s)$$

4. 假设有一债券模型采用债券波动率 $\sigma(t, T)=\sqrt{T-t}$. 证明之前所做的论断：债券价格并不只是短期利率的函数.

5. 当 $\sigma(t, T)\equiv 0$ 时，解出方程(8-46)中的 P.

8.9 HJM 之谜的推导

我们从债券动态价格开始，根据式(8-46)：

$$\mathrm{d}P(t,T)=r(t)P(t,T)\mathrm{d}t+\sigma(t,T)P(t,T)\mathrm{d}B$$

186 简单地，可以写成 $\mathrm{d}P=rP\mathrm{d}t+\sigma P\mathrm{d}B$.

这个模型参照了股票价格模型，不同的是现在的 r 是 t 的函数，而 σ 由 t 和 T 决定.

像以前一样，我们把 $\ln P$ 展开成幂级数. 普通函数 G 的展开级数是

$$\mathrm{d}G=\frac{\partial G}{\partial P}\mathrm{d}P+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial P^2}(\mathrm{d}P)^2+\cdots$$

因此

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\ln P &\approx \frac{1}{P}\mathrm{d}P + \left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{P^2}(\mathrm{d}P)^2 \\ &\approx \frac{1}{P}(rP\,\mathrm{d}t + \sigma P\,\mathrm{d}B) - \frac{1}{2}\frac{1}{P^2}(rP\,\mathrm{d}t + \sigma P\,\mathrm{d}B)^2 \end{aligned} \tag{8-57}$$

运用一般的代数知识及 Ito 定理，上式变成

$$\mathrm{d}\ln P = [r - \frac{1}{2}\sigma^2]\mathrm{d}t + \sigma\mathrm{d}B \tag{8-58}$$

我们接下来的论点将引用两处以前的内容，我们来迅速回顾一下

$$P(t,T) = \exp\left[-\int_t^T f(t,s)\mathrm{d}s\right]$$

因此

$$f(t,T) = -\frac{\partial}{\partial T}\ln P(t,T)$$

即

$$\begin{aligned} \mathrm{d}f(t,T) &= -\mathrm{d}\left(\frac{\partial}{\partial T}\ln P\right) = -\frac{\partial}{\partial T}(\mathrm{d}\ln P) \\ &= -\frac{\partial}{\partial T}\left\{\left[r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t,T)\right]\mathrm{d}t + \sigma(t,T)\mathrm{d}B\right\} \\ &= \sigma\frac{\partial\sigma}{\partial T}\mathrm{d}t - \frac{\partial\sigma}{\partial T}\mathrm{d}B \end{aligned}$$

因为 B 是随机的，也是对称的，所以可以用 $-B$ 替代 B，我们得到

$$\mathrm{d}f(t,T) = \sigma\frac{\partial\sigma}{\partial T}\mathrm{d}t + \frac{\partial\sigma}{\partial T}\mathrm{d}B \tag{8-59}$$

我们将在下一节给出式(8-59)的一个更简单的推导.

让我们停下来回顾另一个问题. 式(8-59)是一个远期利率的模型，但我们并不认为(8-59)是一条公理. 我们是从其他模型推出它的(以及它的性质). 然而，最终结果并没有完全给出.

现在把(8-59)改写成

$$\mathrm{d}f(t,T) = \mu(t,T)\mathrm{d}t + v(t,T)\mathrm{d}B \tag{8-60}$$ 187

我们也许会预期 μ 和 v 是不相关的，但事实却令我们非常惊奇. 让我们把积分学中的基本知识应用到 $\partial\sigma(t,\ T)/\partial T$，则

$$\sigma(t,T) - \sigma(t,t) = \int_t^T \frac{\partial\sigma(t,s)}{\partial s}\mathrm{d}s$$

但 $\sigma(t,\ t)=0$，由于债券接近到期日时波动率趋近于 0，所以

$$\sigma(t,T) = \int_t^T \frac{\partial\sigma(t,s)}{\partial s}\mathrm{d}s \tag{8-61}$$

结合公式(8-59)、(8-60)和(8-61)，可以得到

$$\mu(t,T) = \sigma(t,T)\frac{\partial\sigma(t,T)}{\partial T} = \frac{\partial\sigma(t,T)}{\partial T}\int_t^T \frac{\partial\sigma(t,s)}{\partial s}\mathrm{d}s$$

$$= v(t,T)\int_t^T v(s)\mathrm{d}s$$

该式可以缩写成：

$$\mu = v\int v$$

这就是 HJM 之谜．在这个关于远期利率的模型中，波动率决定漂移率．

这个结果有什么实际的意义吗？当然有，它表明我们可以通过测量波动率并与短期利率相匹配，利用模型求出债券价格、远期利率等．我们将在下一节给出它的应用．现在，我们再来看看(8-59)：

$$\mathrm{d}f(t,T) = \sigma\frac{\partial\sigma}{\partial T}\mathrm{d}t + \frac{\partial\sigma}{\partial T}\mathrm{d}B \tag{8-62}$$

该方程仍然包含随机(布朗运动)项 $\mathrm{d}B$，所以 f 并不完全由 $\sigma(t,\ T)$ 决定．这个结果很不理想，因为我们知道

$$P(t,T) = \exp\left[-\int_t^T f(s,T)\mathrm{d}s\right]$$

而且我们希望能找到 P 的公式，但这只是问题的一部分，为了进一步计算，我们必须得到 $\sigma(t,\ T)$ 的表达式．目前看来，必须要用到数字方法，这也是我们希望做的．

8.10 附录：远期利率漂移

我们将直接采用债券价格推导方程(8-59)．

我们引入远期利率 $F(t,\ T_1,\ T_2)$，它表示在时间 t 预测 $[T_1,\ T_2]$ 期间的远期利率．注意

188

$$F(t,T_1,T_2) = \frac{\ln P(t,T_1) - \ln P(t,T_2)}{T_2 - T_1} \tag{8-63}$$

由于

$$P(t,T_1) = P(t,T_2)\exp[-(T_2 - T_1)F(t,T_1,T_2)]$$

根据式(8-58)立刻可得

$$\mathrm{d}\ln P(t,T_1) = \left[r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t,T_1)\right]\mathrm{d}t + \sigma(t,T_1)\mathrm{d}B \tag{8-64}$$

且

$$\mathrm{d}\ln P(t,T_2) = \left[r(t) - \frac{1}{2}\sigma^2(t,T_2)\right]\mathrm{d}t + \sigma(t,T_2)\mathrm{d}B$$

与(8-64)中的项合并在一起，得

$$\mathrm{d}F(t,T_1,T_2) = \frac{\sigma^2(t,T_2) - \sigma^2(t,T_1)}{2(T_2 - T_1)}\mathrm{d}t + \frac{\sigma(t,T_1) - \sigma(t,T_2)}{(T_2 - T_1)}\mathrm{d}B \tag{8-65}$$

运用代数知识，发现 $r(t)$ 项可以消去，这是非常幸运的，也是相当意外的．我们取极限值，当 T_2 趋近 T_1 的时候，因为 $f(t,\ T_1) = F(t,\ T_1,\ T_2)$，可以得

$$\mathrm{d}F(t,T_1)=\sigma(t,T_1)\,\frac{\partial\,\sigma(t,T_1)}{\partial\,T_1}\mathrm{d}t-\frac{\partial\,\sigma}{\partial\,T_1}(t,T_1)\mathrm{d}B$$

现在我们把 T_1 替换成 T 并把 $\mathrm{d}B$ 前的负号改为正号（因为它是随机且对称的），则

$$\mathrm{d}f(t,T)=\sigma\,\frac{\partial\,\sigma}{\partial\,T}\mathrm{d}t+\frac{\partial\,\sigma}{\partial\,T}\mathrm{d}B \tag{8-66}$$ 189

第 9 章 债券价格计算方法

股票价格似乎永远都处在高位.

Irving Fisher，1929 年 10 月 17 日

9.1 债券价格的二叉树模型

我们可以通过设立微分方程建立债券价格模型，但在大多数情况下，这些微分方程很难求解或者没有封闭解. 因此，金融分析师们尝试采用二叉树方法和点阵展开的方法，以求获得近似解. 这些方法初看起来会觉得十分复杂，令人望而却步，所以本章将选择从简单的介绍入手，甚至你会觉得这里举的第一个例子看起来和债券定价没有丝毫关系.

9.1.1 公平游戏与不公平游戏

公平游戏是指在两人游戏中双方彼此平均净收益为零的游戏，即在公平游戏中任何一方都不占有优势. 190

例 1 或许最耳熟能详的公平游戏便是掷一枚普通硬币. 假设硬币正面朝上能赢 1 美元；硬币反面朝上则对方就赢 1 美元.

I	II	III	乘积
结果	概率	收益	II × III
正面	1/2	+1	+1/2
反面	1/2	−1	−1/2
		和	0

可见，该游戏结果的期望是 0. 让我们进一步假设，假设我们投掷硬币二次，使之变为一个二步游戏，游戏的结果可以由二叉树图给出，如图 9-1. 该两步游戏结果的期望仍然是 0，因此它依旧是一个公平游戏.

对公平游戏的修正 对上述二步游戏稍加修正：

1. 如果第一次投掷结果是正面朝上，则第二次使用如下硬币：

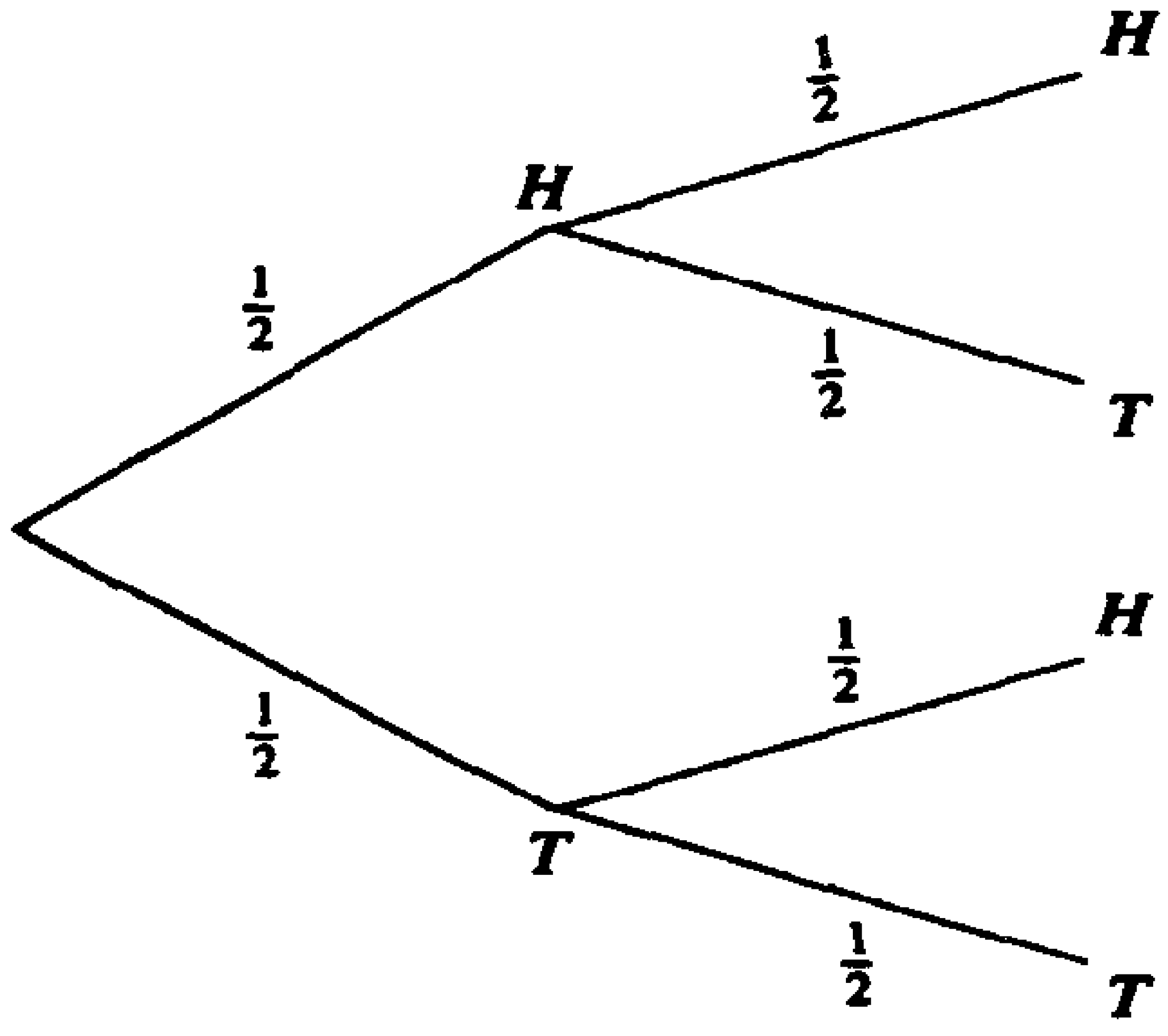
$\Pr[H]=3/4$， $\Pr[T]=1/4$ ㊀

2. 如果第一次投掷结果是反面朝上，则第二次使用如下硬币：

$\Pr[H]=1/4$， $\Pr[T]=3/4$

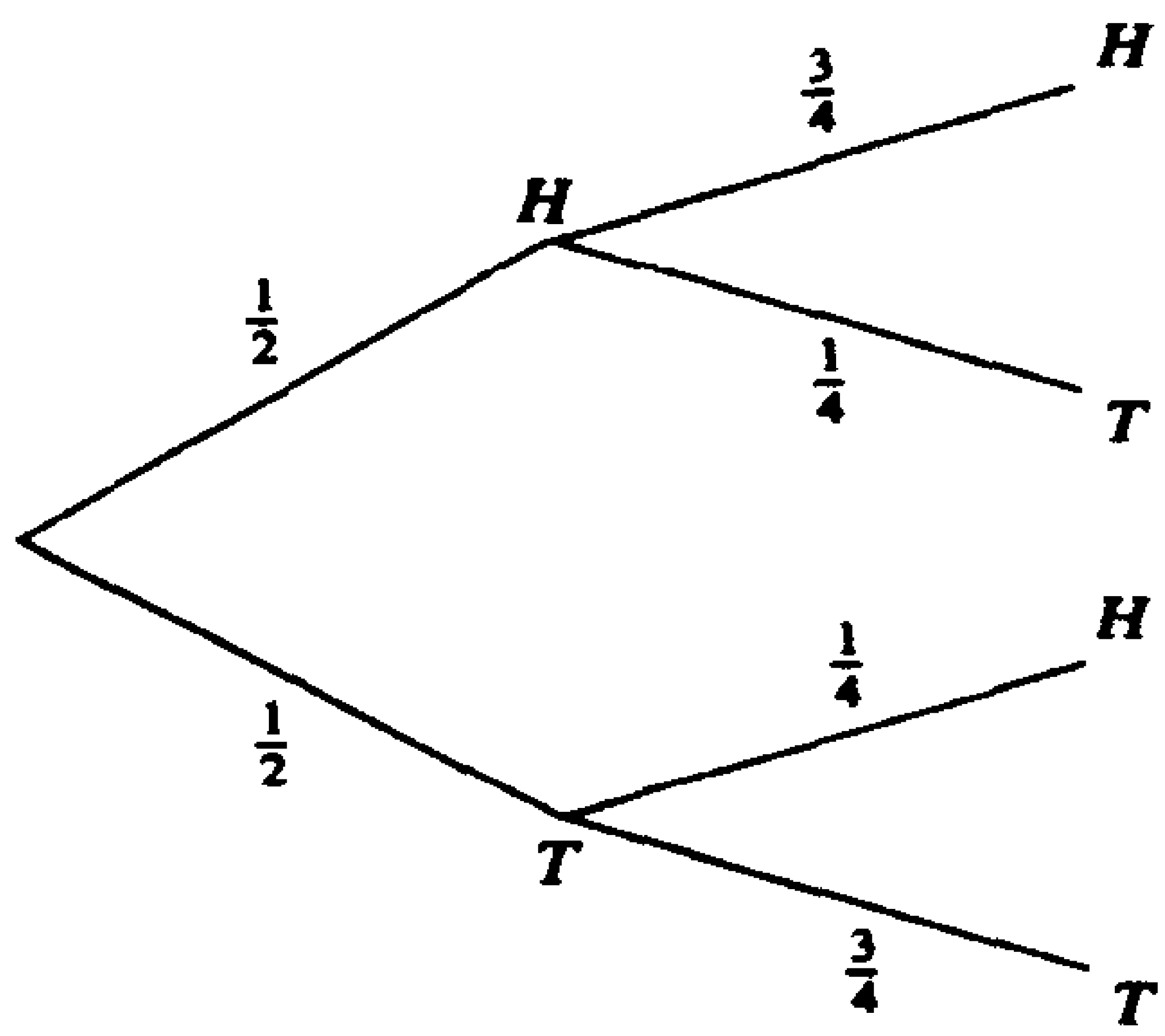
㊀ H、T 分别表示正面和反面，译者注

此二步游戏仍被称为为公平游戏．概率二叉树图见图 9-2.



概率	收率	概率 × 收益
$\frac{1}{4}$	+2	$+\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	0	0
$\frac{1}{4}$	0	0
$\frac{1}{4}$	−2	$-\frac{1}{2}$
	和	0

图 9-1　普通硬币两次投掷的二叉树图



概率	收益	概率 × 收益
$\frac{3}{8}$	+2	$\frac{6}{8}$
$\frac{1}{8}$	0	0
$\frac{1}{8}$	0	0
$\frac{3}{8}$	−2	$-\frac{6}{8}$
	和	0

图 9-2　特殊硬币两次投掷的二叉树图

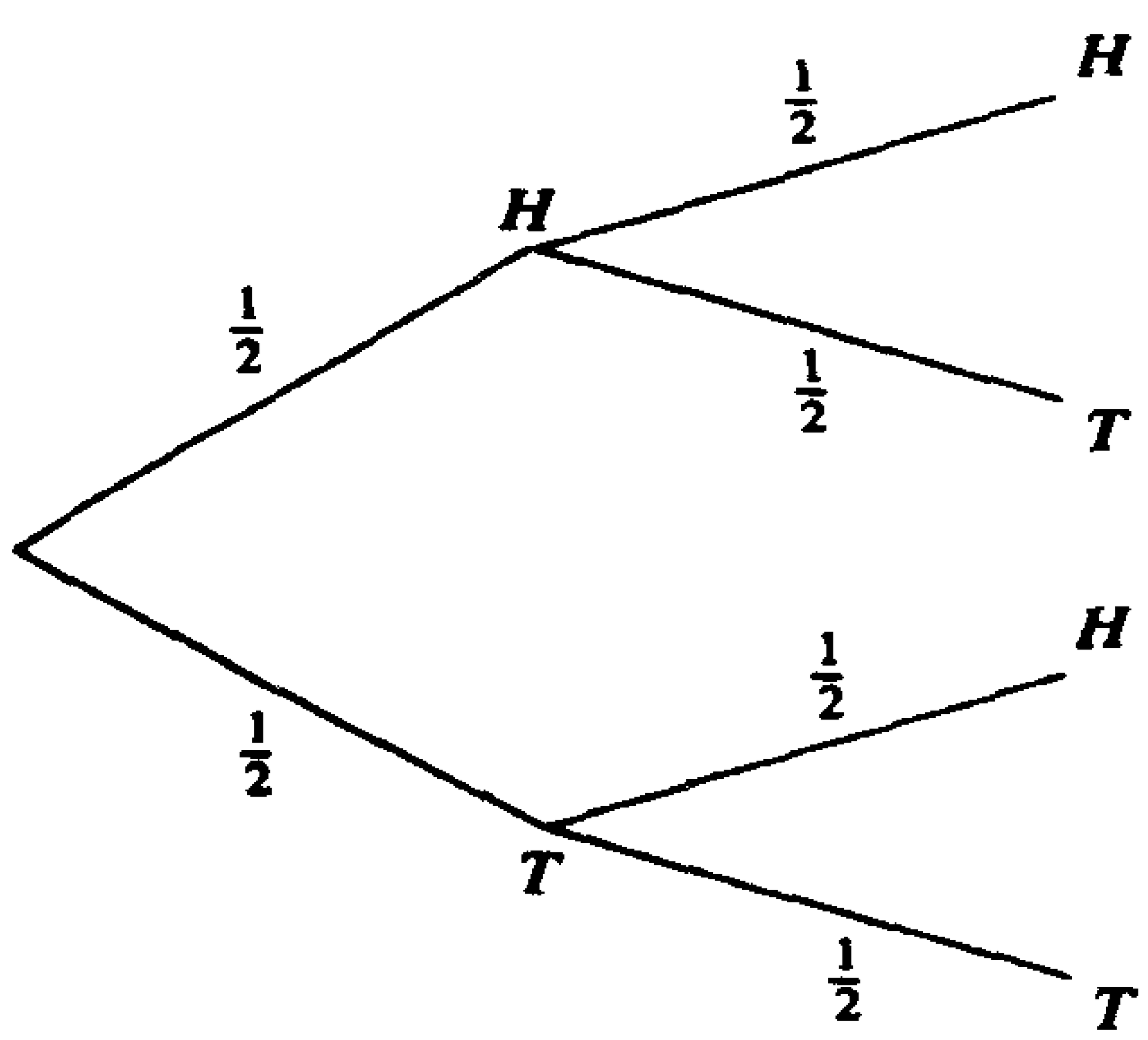
注意　这两个游戏有一个非常重要的区别，这也是举此例的原因之一，即：虽然修正后的二步游戏仍是公平游戏，但它显然不如一步游戏那样“公平”．如果第一次投掷时我们只看而不参与，在接下来的第二次投掷时，我们便拥有了明显的优势和正的期望收益．我们仍假设参与者在硬币正面的情况下赢 1 美元，反面的情况下输 1 美元，那么，第一次结果是正面的话，他就应该玩第二次游戏；而如果第一次结果是反面的话，他就不应该继续玩第二次．也就是说，第二次游戏并不是公平游戏．

评论　很明显，如果我们可以观看而不参与第一次游戏，并在第一次结果是正面的时候用“特殊”硬币($\Pr[H]=3/4$)参与第二次游戏的话，我们就有了优势．现实生活中的一些 21 点扑克牌游戏便利用了这一规律．那些被称为“计算器”的玩家记下先前台面上已

发的牌，并以此作为根据下注．赌场都严厉杜绝这种行为．（电影《雨人》中有与此相关的情节.）

小结　在参与者可以在任何一步参与或退出的多步游戏中，当且仅当每一步都为公平游戏时，该多步游戏才是公平游戏.

公平游戏没有吸引力　其实游戏的设计不必局限于公平游戏．假设我们使游戏稍失公平：仍旧使用普通硬币，但收益调整为：硬币正面获得 1.05 美元，反面则只输去 1 美元．调整收益后的两步游戏结果见图 9-3．对硬币正面获胜的参与者来说，其每玩一次游戏（两步游戏）的期望或平均收益为 5 美分.



概率	收益	概率 × 收益
$\frac{1}{4}$	2.10	$\frac{2.10}{4} = 0.5250$
$\frac{1}{4}$	0.05	$\frac{0.05}{4} = 0.0125$
$\frac{1}{4}$	0.05	$\frac{0.05}{4} = 0.0125$
$\frac{1}{4}$	−2.00	$-\frac{2.00}{4} = -0.5000$
	和	0.05

图 9-3　两步非公平游戏的二叉树图

9.1.2　Ho-Lee 模型

1986 年，T. S. Y. Ho 和 S. B. Lee 提出了首个债券价格的非套利模型，该模型采用的是二叉树的方法⊖.

在建立债券市场模型时，应从拟研究的市场中获取下列数据：

1. 短期利率运行过程中的波动应视为常数，其值由市场数据决定.
2. 由零息债券（ZCBs）的初始收益率曲线得到初始时刻的远期利率 $f(0, t)$.
3. 在 $t_j \leqslant t \leqslant t_j + \Delta = t_{j+1}$ 区间，假设 $f(0, t) = f_j$.

因此，时刻 t_j 之间是具有相同间隔的．Ho-Lee 方法给出了时间间隔 $[t_j, t_{j+1}]$ 上具有恒定波动率 σ 及初始远期利率为 $f(0, t)$ 的债券价格的二叉树图.

建立二叉树模型

建立二叉树模型时，我们必须同时匹配短期利率均值（漂移）和给定的短期利率波动率．这实施起来会不会很困难呢？实施的顺序又会不会给结果造成影

⊖ 参见 *Ho, T. S. Y., and Lee, S. B.*, "*Term Structure Movements and Pricing Interest Rate Contingent Claims*," Journal of Finance, 41(*December* 1986), 1011-1029.

响呢？

- 由于波动率是常数，直接使用即可.
- 为了对漂移率进行修正，许多节点处的均值需要调整. 这一步同样十分简单，我们放在最后进行.

为了能更清楚地弄清漂移率的问题，假设有一串数字

$$a_1, a_2, \cdots, a_n,$$

191～193 其均值为 $\bar{a}$. 如果我们希望改变所有的数字，且使新数字的均值为 A，只要将 a_k 换成 $a_k+(A-\bar{a})$换言之，只要把所有数字整体向上或向下调动，就可以对均值进行修正. 这样的调动并不会改变波动率，这也是将它作为最后一步的原因.

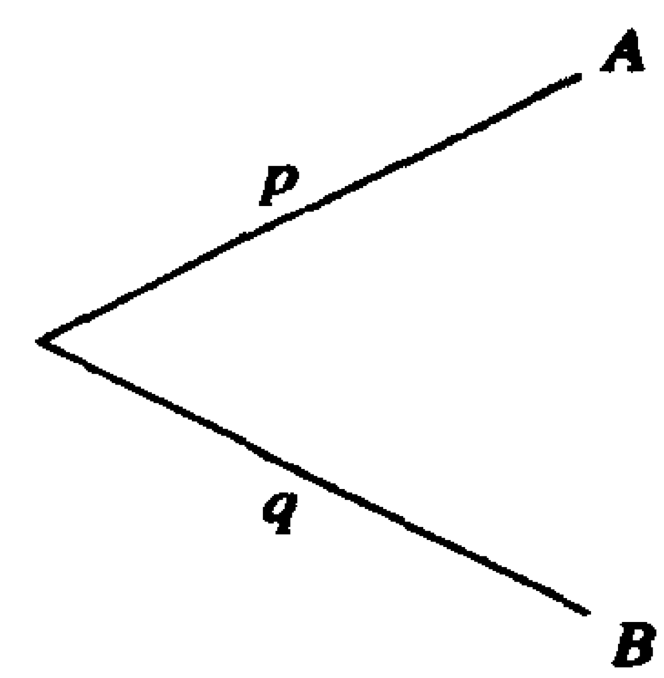


图 9-4　一般的随机变量的一步二叉树

二项式分布的两个公式

图 9-4 给出的是随机变量的一步二叉树. A 和 B 是随机变量 X 的两个可能结果，则：

$\mu = X$ 的均值 $= pA + qB$

$Var(X) = E((X-\mu)^2) = (A-B)^2 pq$

二项式模型

为方便起见，我们将采用图 9-5 所示的模型，此处计算利率和本金增长的公式为 $B(\Delta t)=(1+r\Delta t)B_0$，而不是 $B(\Delta t)=e^{r\Delta t}B_0$. 对于很小的 Δt，这两种方法几乎没有差别.

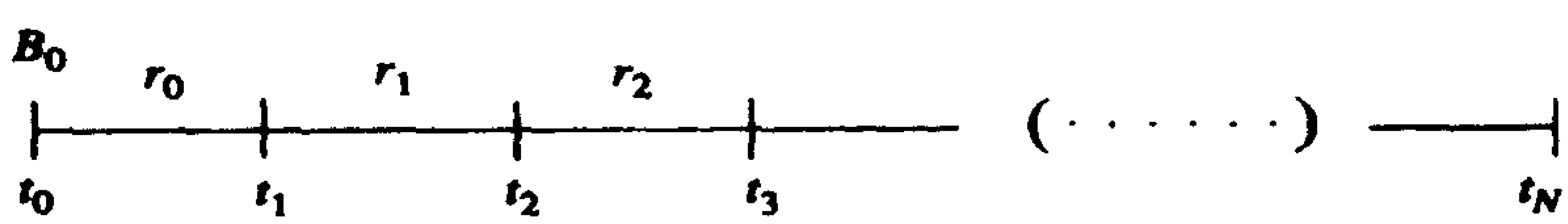


图 9-5　简单利率下本金的增长

我们在模型中令 $B_0=1$ 美元，这样将帮助我们估计零息债券的价格.

1. 在时间区间$[t_0, t_1]$内，利率为 r_0（短期利率）. 则$(1+r_0\Delta t)B_0=B_1$，这是由于 $t_1-t_0=\Delta t$.

2. 在时间区间$[t_1, t_2]$内，假设短期利率为 $r_{1,u}$或 $r_{1,d}$值中的一个，且 $p=q=0.5$. 通过收益率曲线可以确定该期间内利率为 f_1（由 $P_0(t_1, t_2)$估计得到）. 为了在满足利率波动率的同时，也满足利率的均值条件，下面两个等式必须成立：

$$\frac{r_{1u}+r_{1d}}{2}=f_1 \tag{a}$$

（得到 $r_{1u}+r_{1d}=2f_1$），且

$$(r_{1u}-r_{1d})^2=4\Delta t\sigma^2 \tag{b}$$

公式(b)同样可以写成：

$$r_{1u}-r_{1d}=2\sigma\sqrt{\Delta t}$$ 194

注意到 $t_{j+1}-t_j=\Delta t$，我们可以很容易地解出式(a)和式(b)，得到：

$$r_{1u}=f_1+\sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$r_{1d}=f_1-\sigma\sqrt{\Delta t}$$

值得注意的是得到的两解是关于 f_1 对称的．货币市场价值如图 9-6 所示．

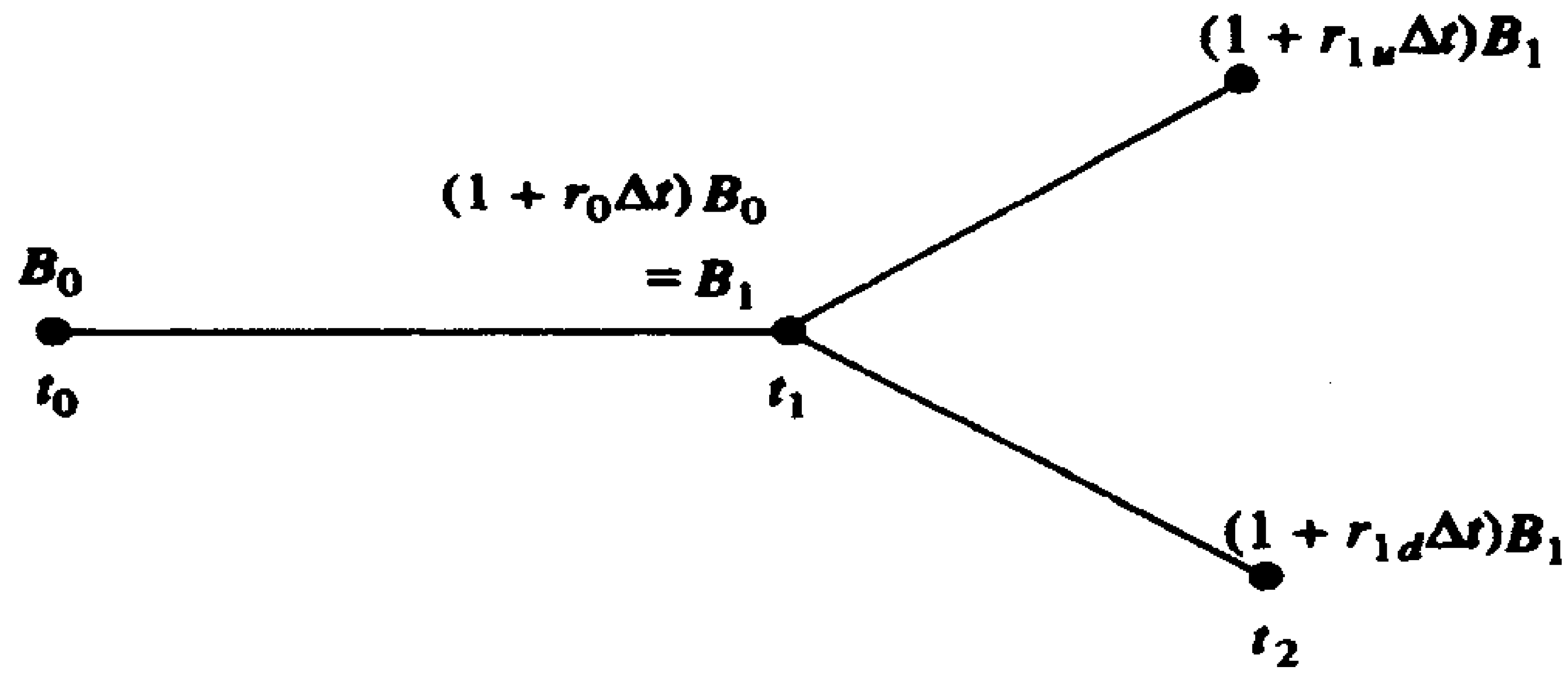


图 9-6 货币市场上两步二叉树的可能值

为了继续构建短期利率的二叉树图，只需重复上述步骤，并注意保持波动率不变．这样，构建的二叉树图就变得十分简单，如图 9-7 所示．

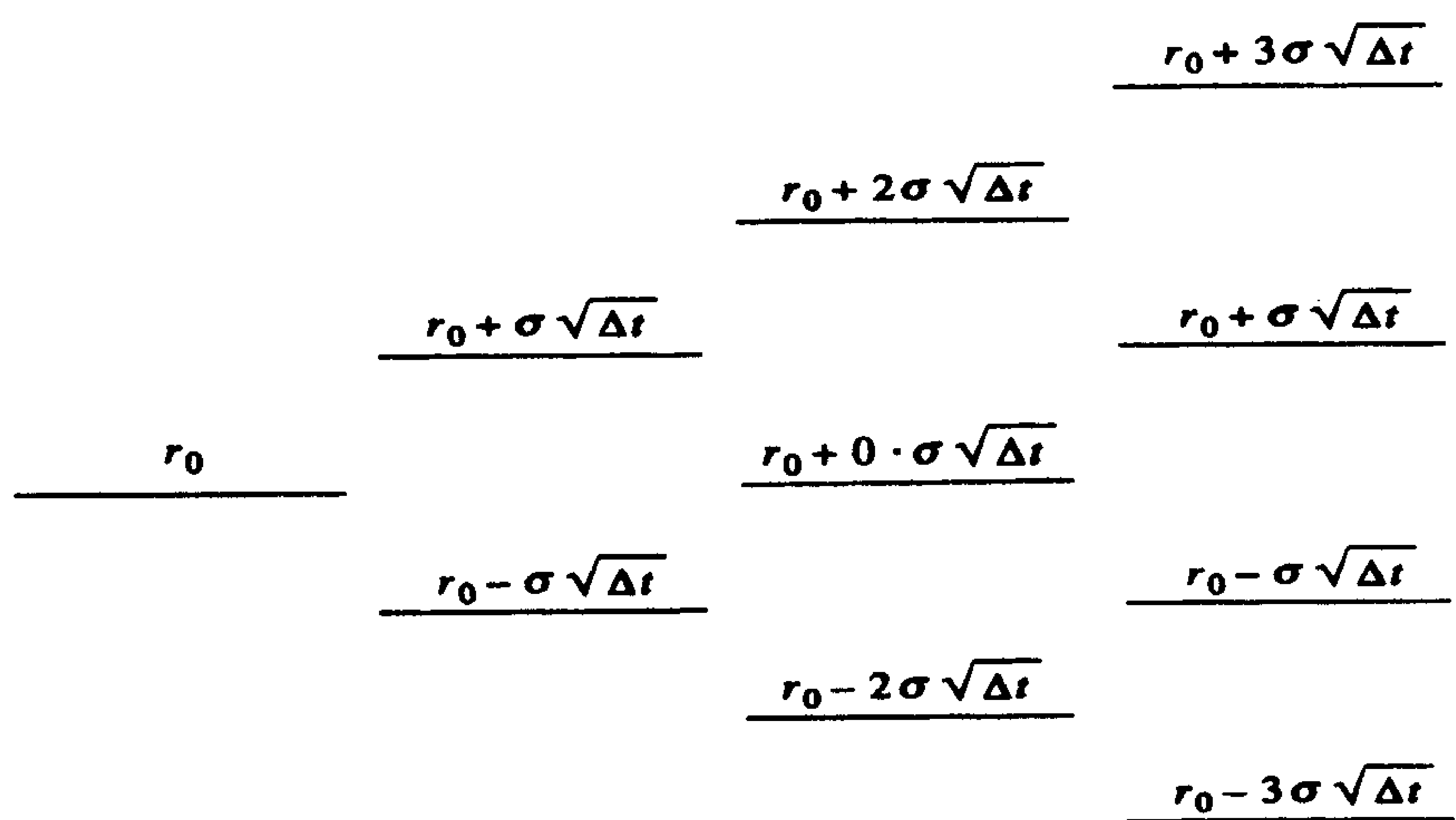


图 9-7 “原始的”短期利率二叉树图

该二叉树图只是一个算术的随机游走．路径的波动率也满足我们的要求．然而，所有相邻节点间的均值($[t_k,\ t_{k+1}]$期间内的利率均值)都是 r_0，所以该短期利率模型的均值过于简单，只能称为“原始的”模型．

上述模型并非我们所希望得到的，因为均值应当是原始远期利率 f_k. 所幸的是，
195 要对此加以修改并非难事. 对于$[t_k, t_{k+1}]$，记 $r_{k,j}$为该时间段内一枝上的利率.

令 $r_{k,j}=r_{k,j}-r_0+f_k$，这样对于固定的 k，$r_{k,j}$的均值(即$[t_k, t_{k+1}]$上所有分枝的利率均值)便为该时间段上的远期利率 f_k. 因此新的二叉树图(最终二叉树图)所有分枝上的利率应由 $r_{k,j}$给出.

尽管把这样的调整归结为公式会显得非常复杂，但调整后的二叉树图的表现形式还是比较简单的，如图 9-8 所示.

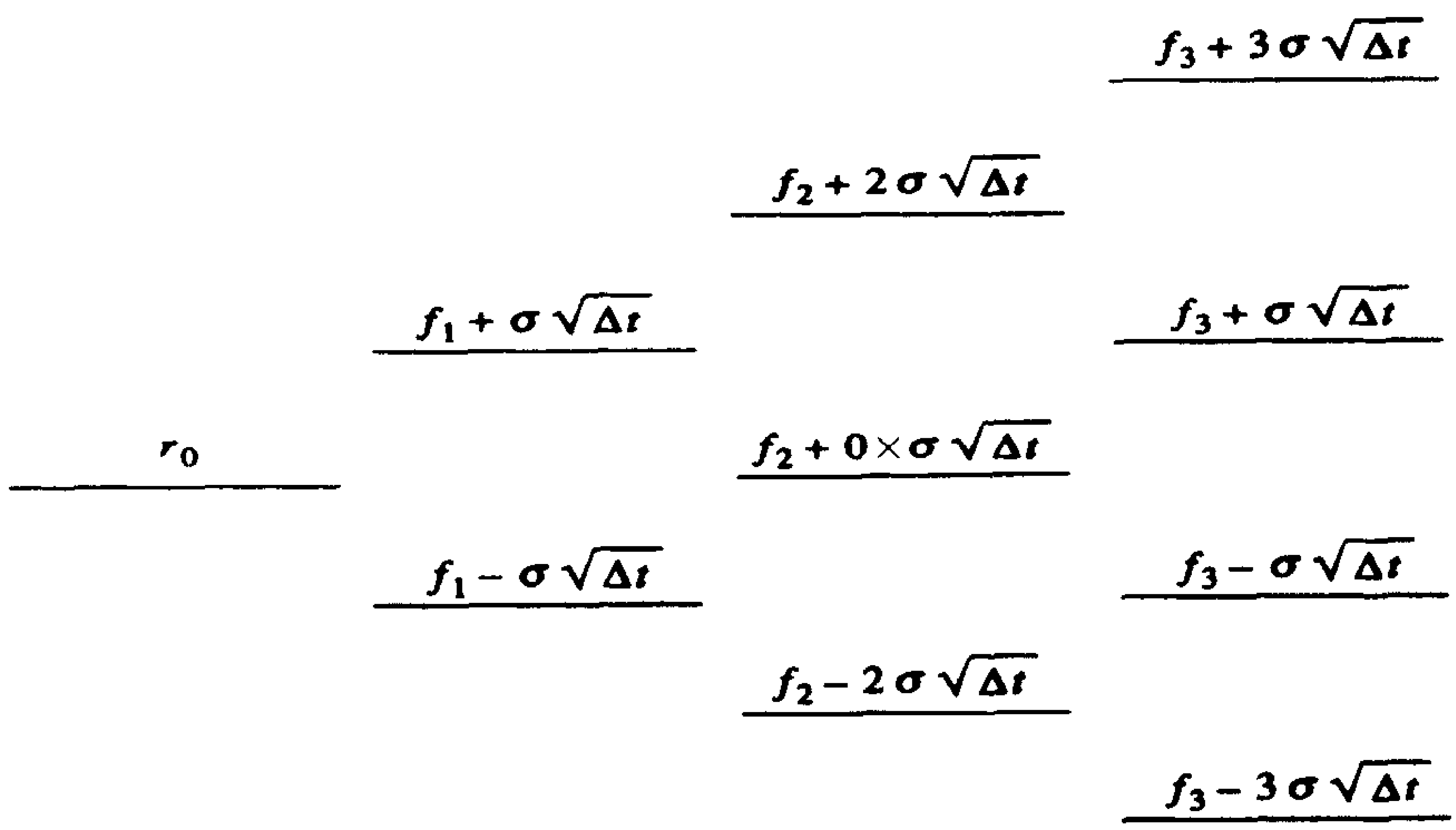


图 9-8 最终的短期利率二叉树图

上述二叉树图的构建要求我们既能横向(随着时间变化的路径，见图 9-9)又能纵向(固定时间点上利率序列，见图 9-10)地分析二叉树图.

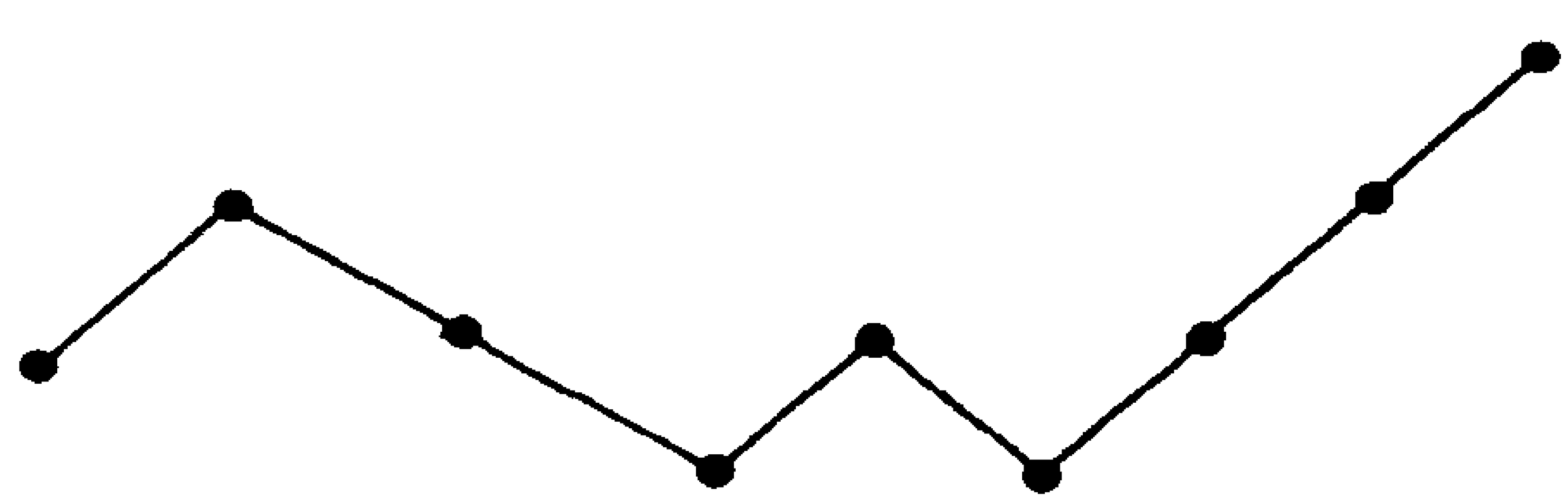


图 9-9 随时间变化的二叉树图中的一条路径

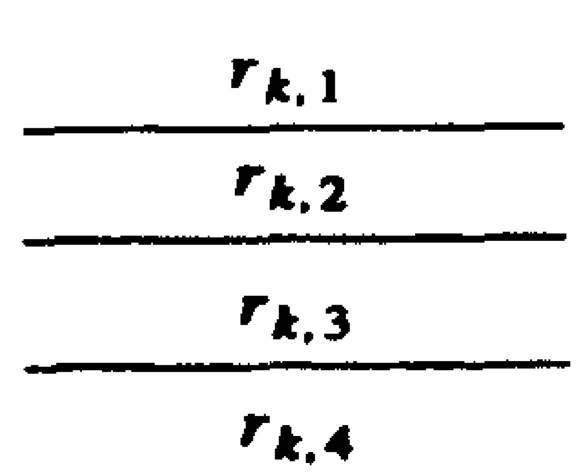


图9-10 同一时间点上的利率排列

当 $r_{k,j}$ 确定时，货币市场价格二叉树图就非常容易建立，见图 9-11.

注意 尽管 $r_{2,2}=r_{2,3}$，但二叉树图是不能合并的，且 $B_{3,2}$ 并不等于 $B_{3,3}$. 由于二叉树图是不能再合并的，节点的数量也就呈 2^{k-1} 的指数增长(即时间点 t_k 上有 2^{k-1} 个节点). 这种指数增长带来了许多问题，即使现代的计算机也解决不了.

构建这样的二叉树图初看起来的确相当复杂，但只要完全弄清楚一个例子(比如接下来所举的例子)后，就会显得容易一些. 196

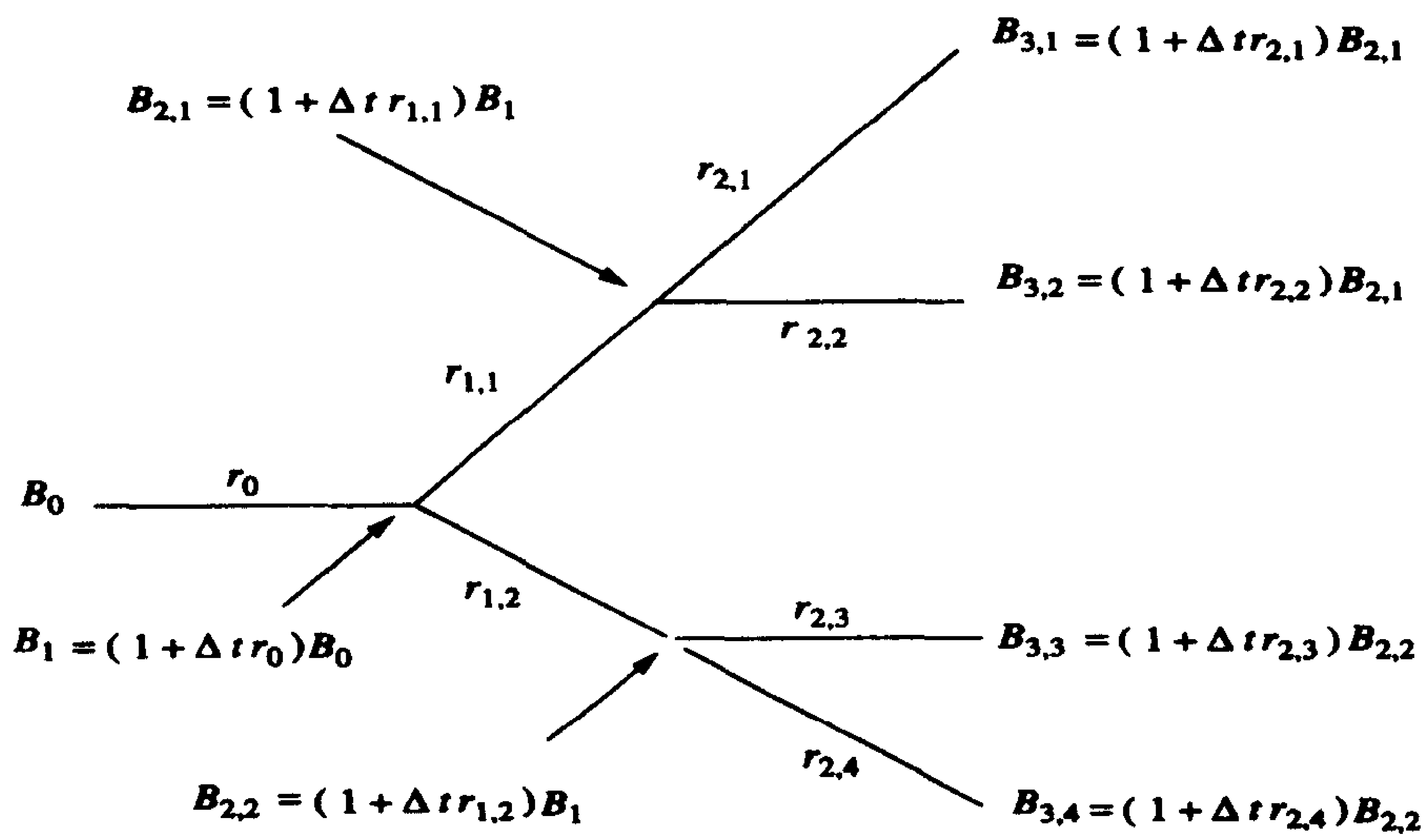


图 9-11 货币市场价格二叉树图

例 1 (**Ho-Lee**)已知下列资料：

1. 由收益率曲线得到 3 个月远期利率，并可根据现有数据估计 σ.

$$r_0=0.0485$$
$$f_1=0.051$$
$$f_2=0.0525$$
$$f_3=0.055$$
$$f_4=0.055$$

2. $\sigma=0.01$

求前 4 个时间区间的货币市场价格二叉树图.

第一步 先从构建"原始的"短期利率二叉树图开始. 因为 $\sigma\sqrt{\Delta t}=\sqrt{0.25}(0.01)=0.005$，所以 $r_{1u}=r_0+\sigma\sqrt{\Delta t}=0.0485+\sqrt{0.25}(0.01)=0.0535$，同样，其余短期利率也很容易求出，见图 9-12. 在构建二叉树模型时我们采用的模型稍有不同，这是为了强调 $[t_j,\ t_{j+1}]$ 区间上利率的不变性.

第二步 如"建立二叉树模型"一节所述，调节短期利率使之与初始时刻的远期利率相符，以此获得模型中所需的短期利率.

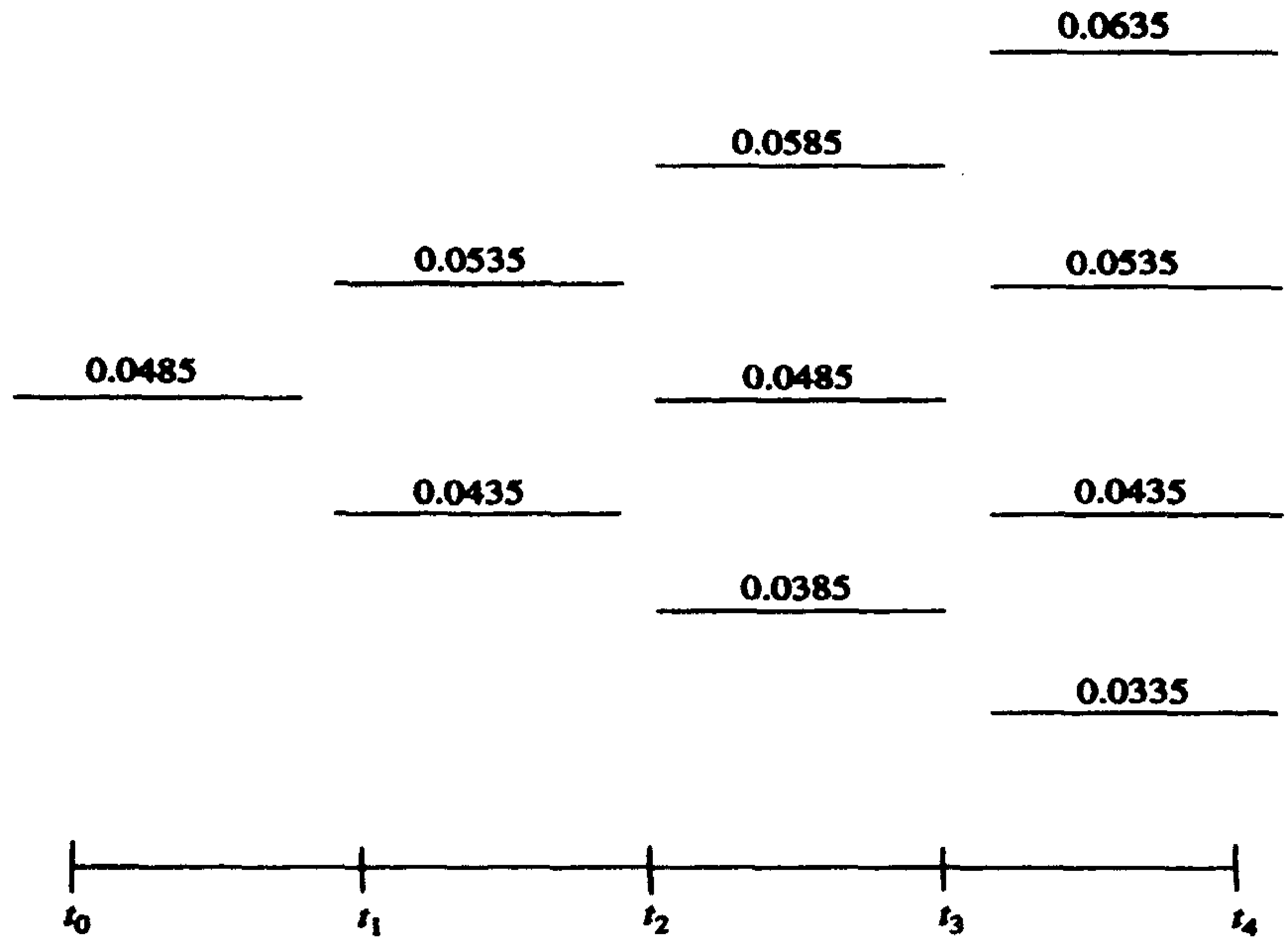


图 9-12 “原始的”二叉树图

时间区间	初始时刻的远期利率	调整量(短期利率－原始的平均)
$[t_1, t_2]$	0.051	0.0510－0.0485＝0.0025
$[t_2, t_3]$	0.0525	0.0525－0.0485＝0.0040
$[t_3, t_4]$	0.055	0.055－0.0485＝0.0065

在“原始的”二叉树图的利率上加上调整量，便得到图 9-13.

货币市场二叉树图 利用下面这个公式获得最后结果：

$$B_{k+1,j} = (1 + r_{k,j}\Delta t)B_{k,j}$$

其中，$\Delta t=0.25$，结果如图 9-14 所示.

注意 货币市场二叉树图不能合并.

例 2 (**Ho-Lee**)已知数据同例 1，而这里 $\Delta t=1$. 我们将采取 Ho 和 Lee 最初提出的后推法计算两种零息债券的价格. 其中，一种债券在第 4 期末到期，而另一种债券则在第 3 期末到期.

为此，我们建立两个债券二叉树图. 到期日的节点上，价格为 1 美元，即为债券的面值. 之前的节点上为贴现后的价格，贴现利率与例 1 中短期利率二叉树图上的利率相一致.

通过第 3 章的连锁理论，可以求得每一个节点上的价格. 与之前不同的是，在这里，贴现利率是随着不同的节点而改变的. 假设利率如图 9-15 所示，根据递推公式(3.3)，有：

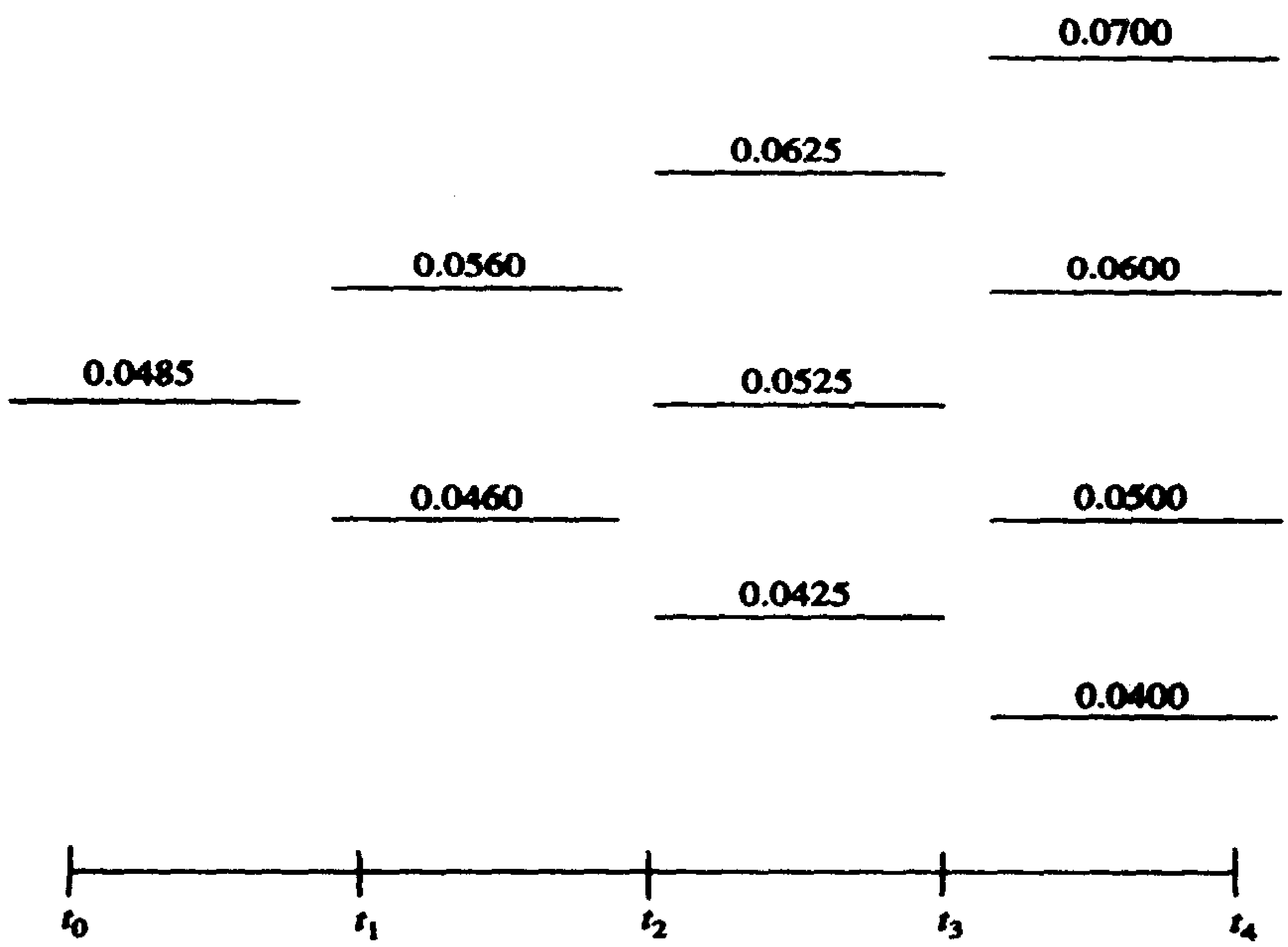


图 9-13 调整后的短期利率二叉树图

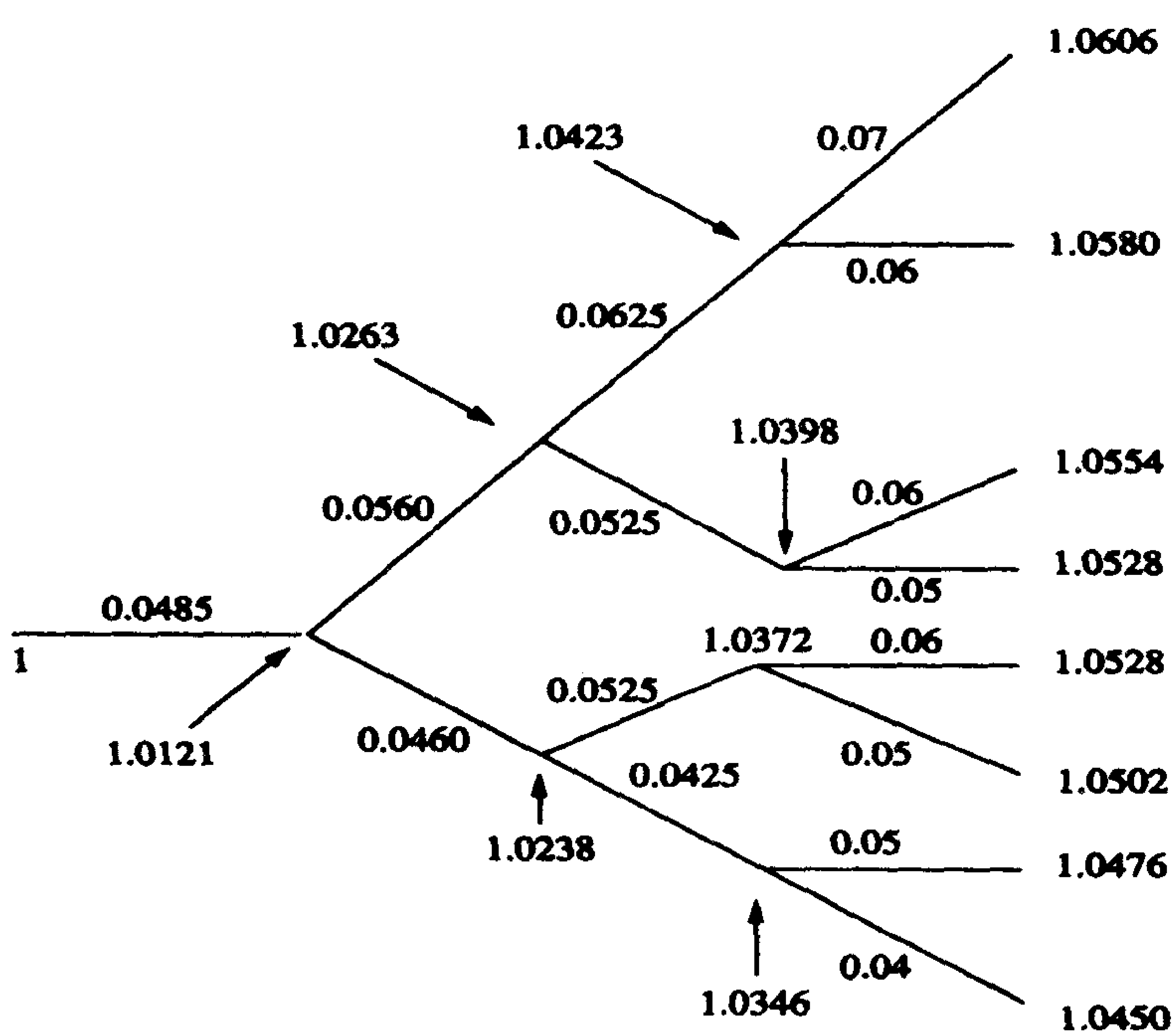


图 9-14 货币市场价值二叉树图

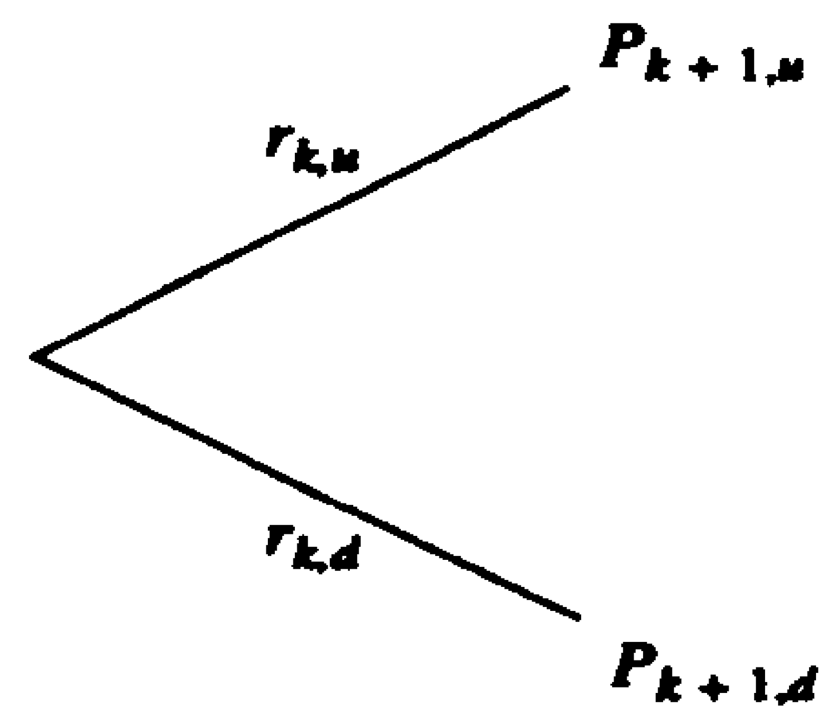


图 9-15　短期利率二叉树的分枝图

$$P_k = 0.5(1 + r_{k,u}\Delta t)^{-1} \times P_{k+1,u} + 0.5(1 + r_{k,d}\Delta t)^{-1} \times P_{k+1,d}$$

根据这一算法可以得到债券二叉树图．首先看 3 期后到期的债券，其二叉树图如图 9-16 所示．债券的初始价格为 0.8622，也就是开始节点上的价格．用同样的方法可以得到第 4 期间到期的债券的价格．具体计算留给读者考虑．

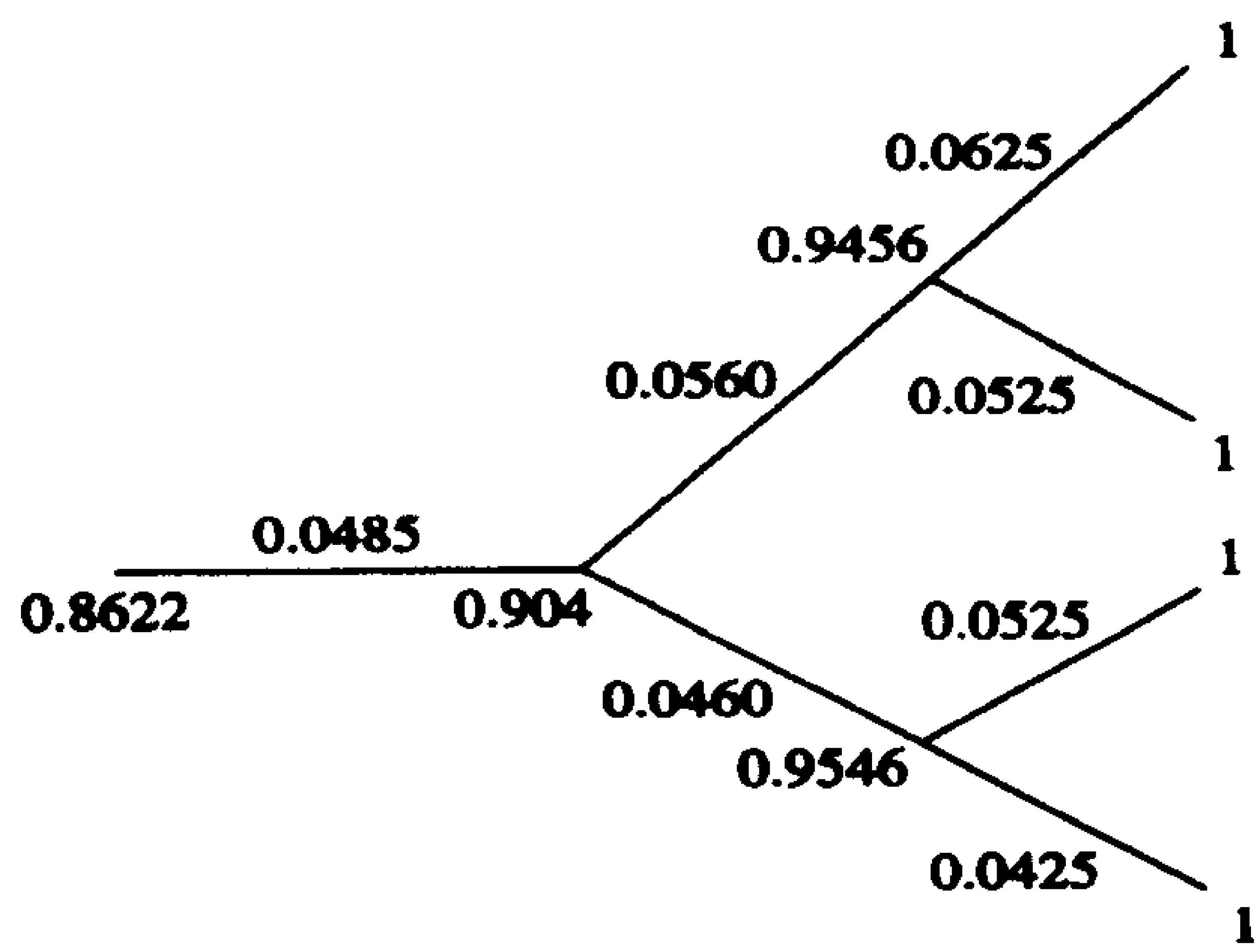


图 9-16　债券二叉树图

习题

1. 已知 4 个月远期利率如下：

$$r_0 = 0.05$$
$$f_1 = 0.0515$$
$$f_2 = 0.052$$
$$f_3 = 0.0525$$
$$\sigma = 0.01$$

利用 Ho-Lee 模型求前四个期间的货币市场价格二叉树图．

2. 已知 6 个月远期利率如下：

$$r_0 = 0.049$$

$$f_1 = 0.050$$
$$f_2 = 0.051$$
$$f_3 = 0.052$$
$$\sigma = 0.011$$

利用 Ho-Lee 模型求前四个期间的货币市场价格二叉树图.

9.2　二项式的 Vasicek 模型：均值反转模型

在这一节中，我们将继续使用上一节提出的 Ho-Lee 模型，并在构建模型中加一个步骤. 该步骤引入了均值反转，形象地说，就是把利率"推向"均值，即平均水平. 197～200

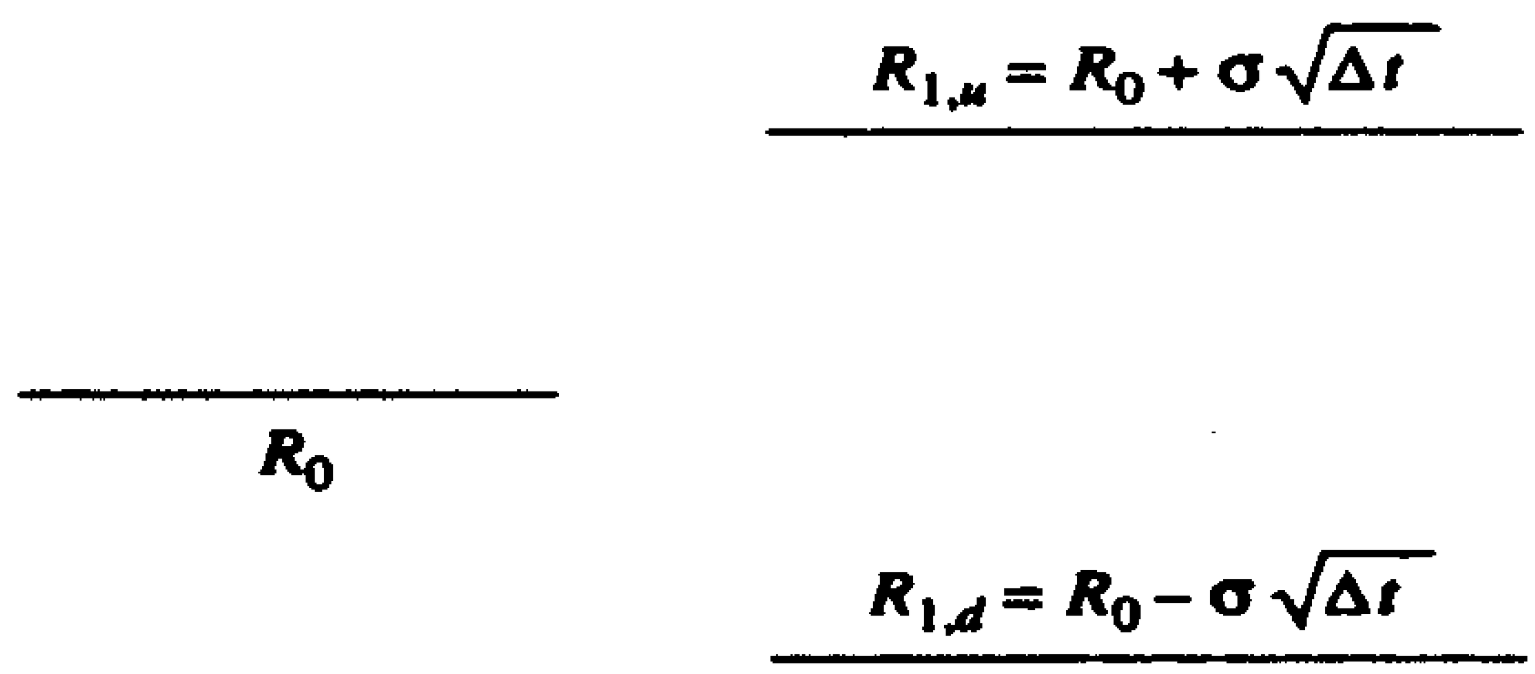


图 9-17　9.1.2 节中的利率二叉树图

在先前的 Vasicek 模型中，利率 r 的表达式为：

$$\mathrm{d}r = a(b-r)\mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B$$

我们将利用等式右边的第一项来进行均值反转.

假设已知：

1. 在$[t_j, t_{j+1}]$($j=0, \cdots, N-1$)上远期利率为 f_j
2. a，σ
3. $[t_0, t_N]$上利率均值为 b

我们将分两步采取数学推导的方法来构建新模型. 第一步先从只有一期的基本例子算起. 在前一期计算完后，再通过第二步计算下一期.

9.2.1　基本例子

第一步反转

在对二叉树展开计算之前，先调整 R_0

$$R_{1,u} = R_0 + \sigma\sqrt{\Delta t}$$
$$R_{1,d} = R_0 - \sigma\sqrt{\Delta t}$$

用下式替换 R_0

$$R_0^r = R_0 + a(b - R_0)\Delta t$$

上标 r 代表反转. 这一步骤便是均值的反转.

第二步 展开二叉树图

我们定义

$$R_{1,u}^{\#} = R_0^r + \sigma\sqrt{\Delta t}$$

$$R_{1,d}^{\#} = R_0^r - \sigma\sqrt{\Delta t}$$

201 如图 9-18 所示，这一步保证了波动的正确性.

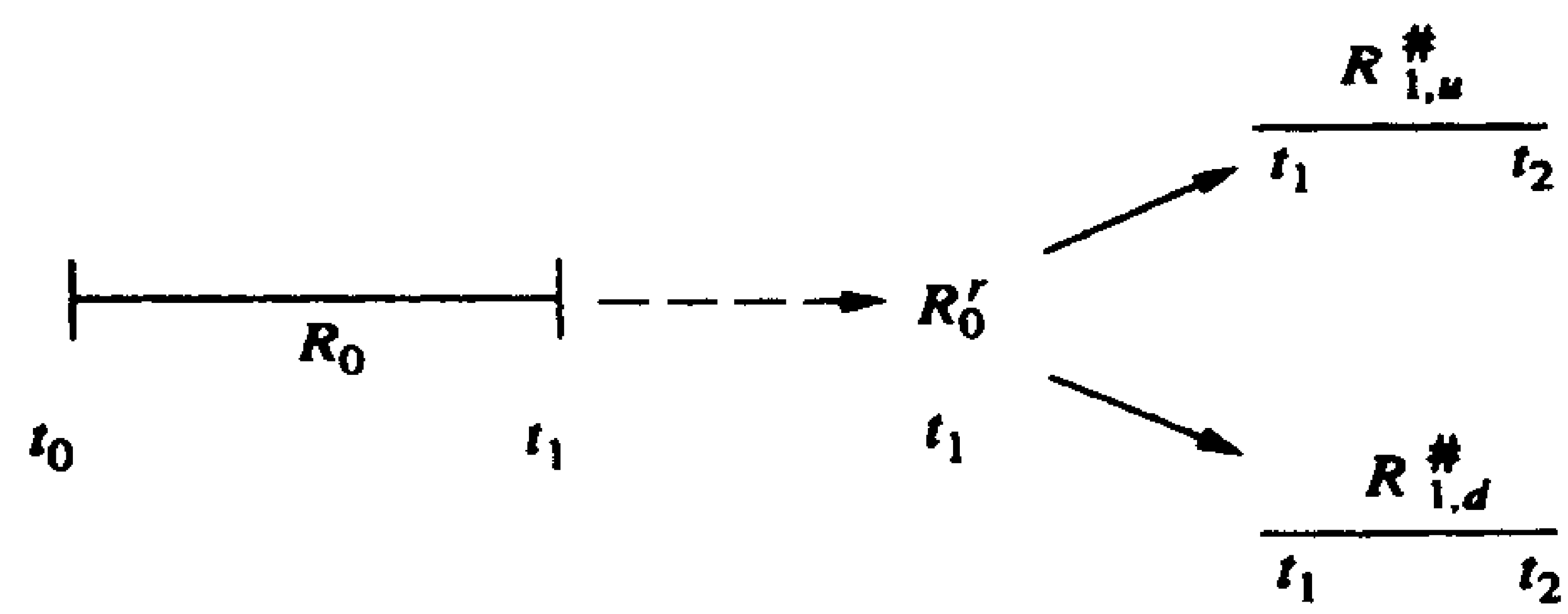


图 9-18 Vasicek 模型的二叉树图中从 t_1 延伸至 t_2

第三步 满足远期利率条件

目前，$R_{1,u}$和 $R_{1,d}$的均值仍与远期利率不匹配，但要做到这一点并不难. 令

$$R_{1,u} = R_{1,u}^{\#} - \left(\frac{R_{1,u}^{\#} + R_{1,d}^{\#}}{2}\right) + R_1$$

及

$$R_{1,d} = R_{1,d}^{\#} - \left(\frac{R_{1,u}^{\#} + R_{1,d}^{\#}}{2}\right) + R_1$$

这样便完成了利率二叉树图计算的第二阶段，如图 9-19 所示.

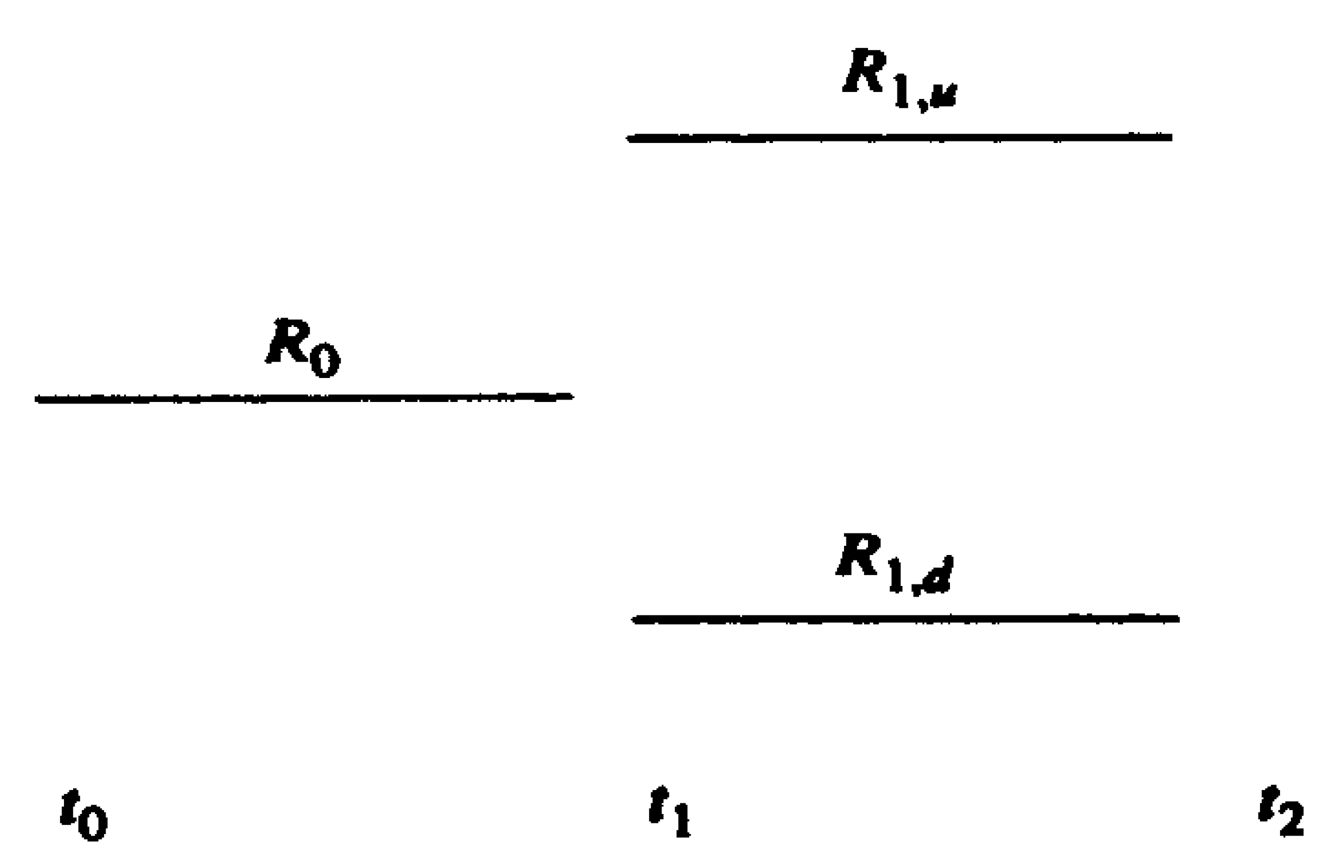


图 9-19 利率二叉树图延伸至 t_2

这样构建二叉树图是为了保证所有的路径都具有正确的波动率，且对于固定的时间区间$[t_k, t_{k+1}]$，利率的均值与远期利率 f_k 相匹配.

9.2.2 一般推导步骤

假设我们已知远期利率 $R(t_n, j)$，该利率表示 t_n 时刻 j 路径上的利率，此时共有 2^{n-1} 个节点.

第一步 反转

根据 $R^r(t_n, j)=R(t_n, j)+a(b-R(t_n, j))\Delta t$，替换 $R(t_n, j)$.

第二步 展开二叉树图

在 $j=1$ 至 2^{n-1} 上令

$$R^{\#}(t_{n+1}, j^{+}) = R^{r}(t_n, j) + \sigma\Delta t$$

及

$$R^{\#}(t_{n+1}, j^{-}) = R^{r}(t_n, j) - \sigma\Delta t$$

在 t_{n+1} 时刻共有 2^n 个节点. $\sigma\Delta t$ 项保证了路径上的波动为 r_j，与现实世界的真值相符. 202

第三步 满足远期利率条件

区间 $[t_{n+1}, t_{n+2}]$ 上的短期利率 $R_{t_{n+1}}$ 是给定的，我们期望求得 $R(t_{n+1}, j)$ 来反映此利率. 令 $\bar{R}_{t_{n+1}}=2^{-n}\sum_{j=1}^{2n}R^{\#}(t_{n+1}, j)$. 为完成最后一个步骤，只需令 $R(t_{n+1}, j)=R^{\#}(t_{n+1}, j)-\bar{R}_{t_{n+1}}+f_{t_{n+1}}$. 最后一步的定义看似十分复杂，其实是非常简单的. 等式右边前两项的均值为 0. 因此，如果对 j 路径各节点上的 $R(t_{n+1}, j)$ 求均值，所得的结果便是 $[t_{n+1}, t_{n+2}]$ 上的远期利率 $f_{t_{n+1}}$.

小结

从模型的构建过程来看，所有的远期利率和波动率都满足模型的要求.

例： 反转模型

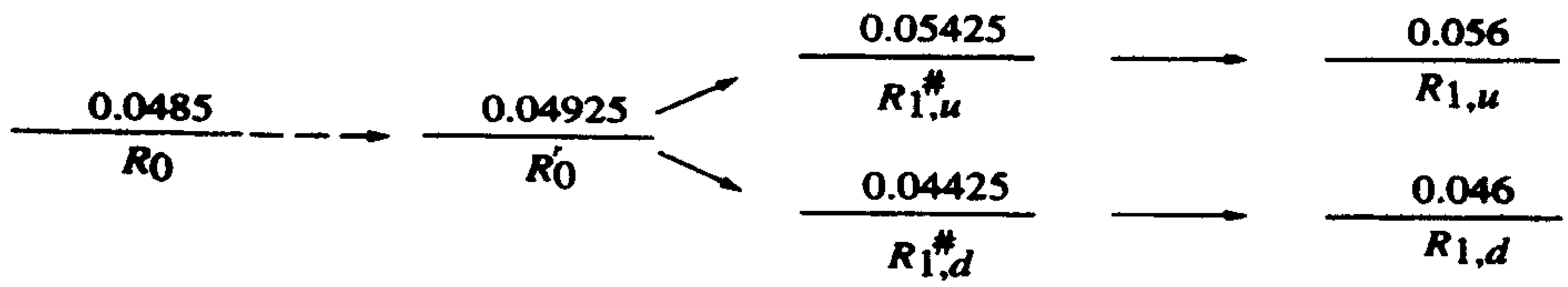
1. 由 9.1 节中例 1 和例 2 中所用的收益率曲线得知 3 个月的远期利率如下：

$$r_0 = 0.0485$$
$$f_1 = 0.051$$
$$f_2 = 0.0525$$
$$f_3 = 0.055$$
$$R_4 = 0.057$$

2. 此外，还已知：

$$a = 0.4$$
$$\Delta t = 1/4$$
$$b = 0.056$$
$$\sigma = 0.01$$

利用反转模型求货币市场二叉树图. 首先，由 $R_0=0.0485$ 得到 $R_0^r=0.04925$. 二叉树图如图 9-20 展开至 t_2，如图 9-21 延伸至 t_3，如图 9-22 展开至 t_4. 利率二叉树的汇总图如图 9-23 所示，由此可以求得货币市场二叉树图，如图 9-24 所示.



203 图 9-20 利率二叉树图(t_0 至 t_2)

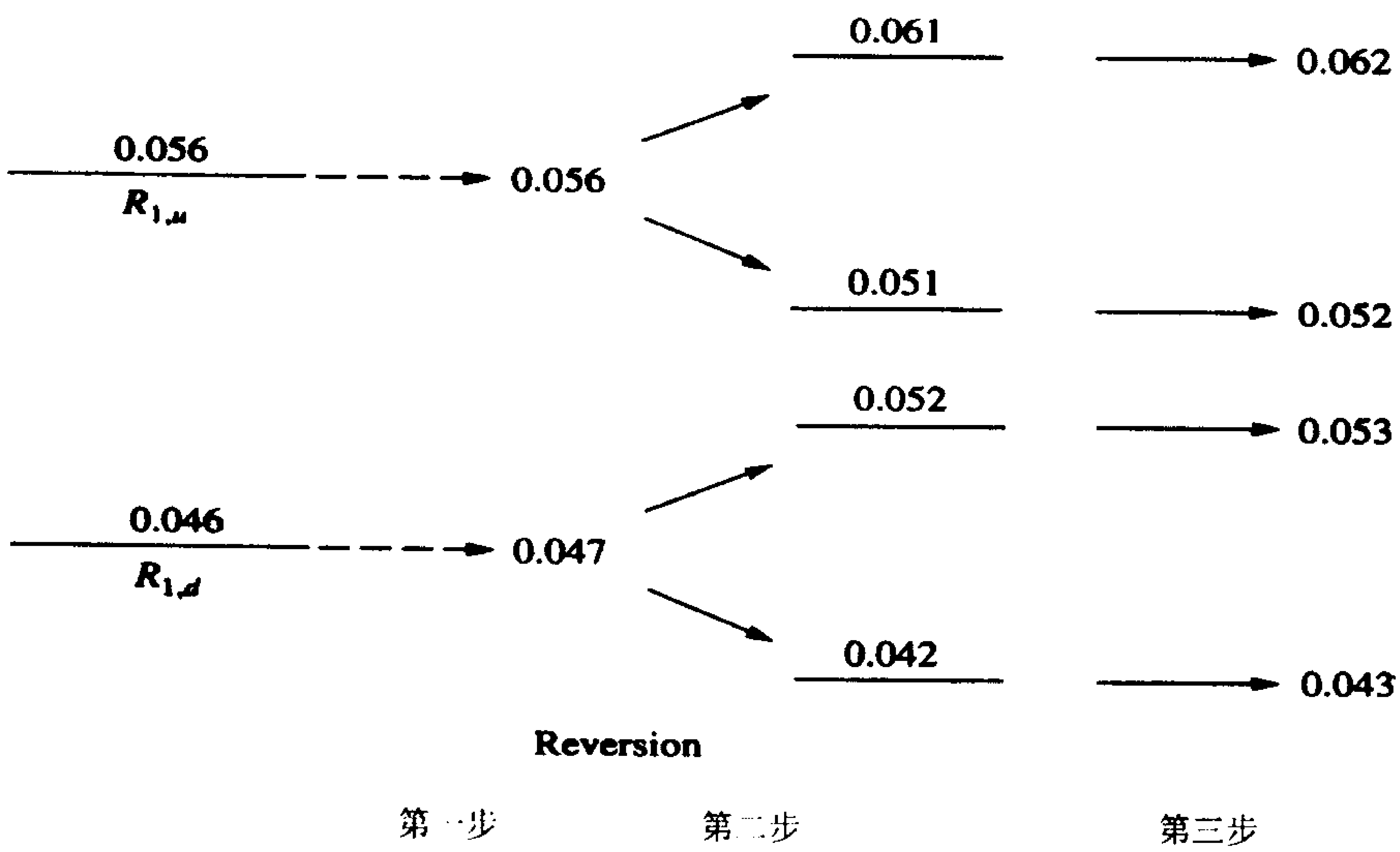
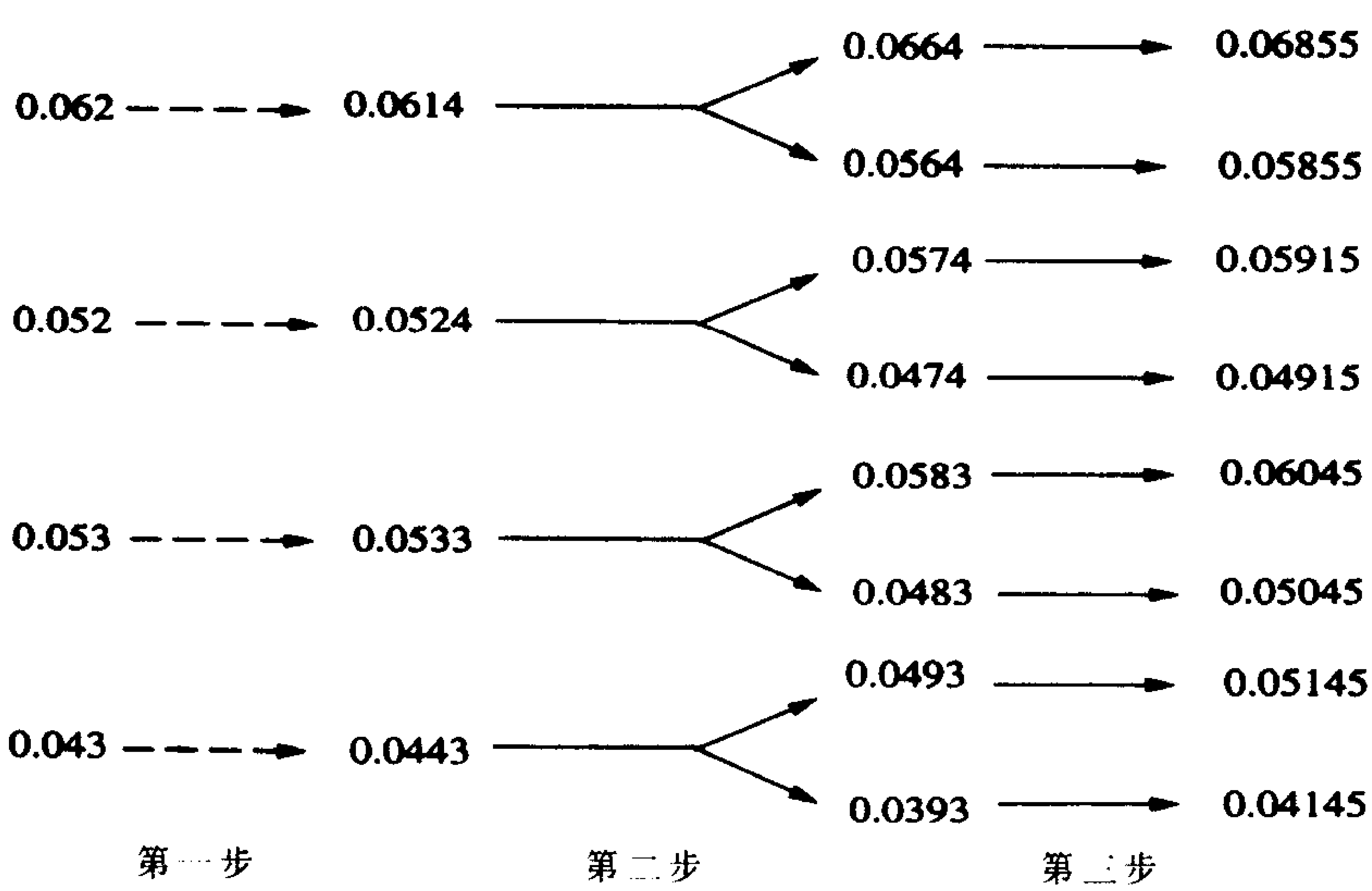


图 9-21 利率二叉树图(t_2 至 t_3)



204 图 9-22 利率二叉树图(t_3 至 t_4)

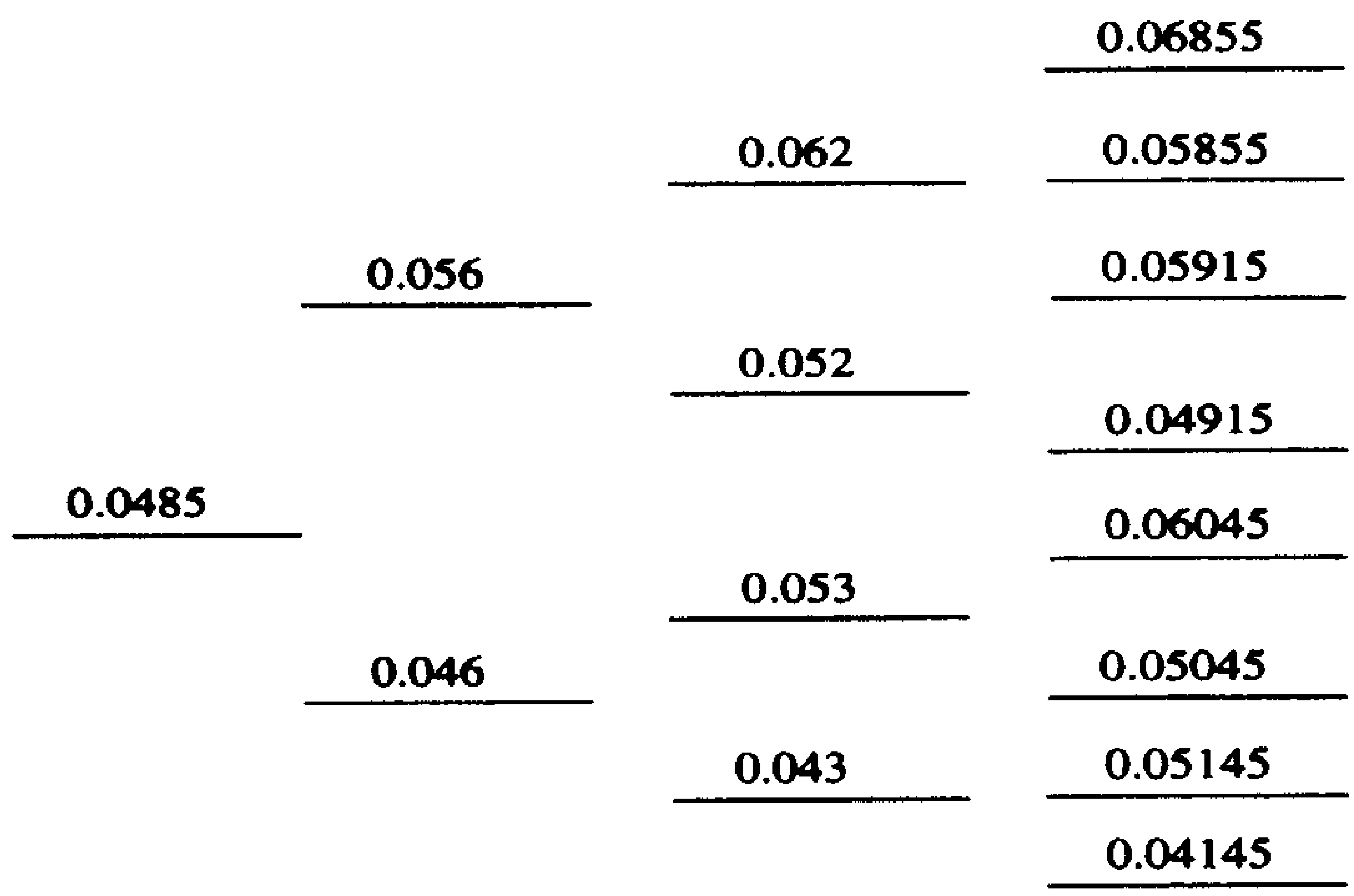


图 9-23　利率二叉树的汇总图

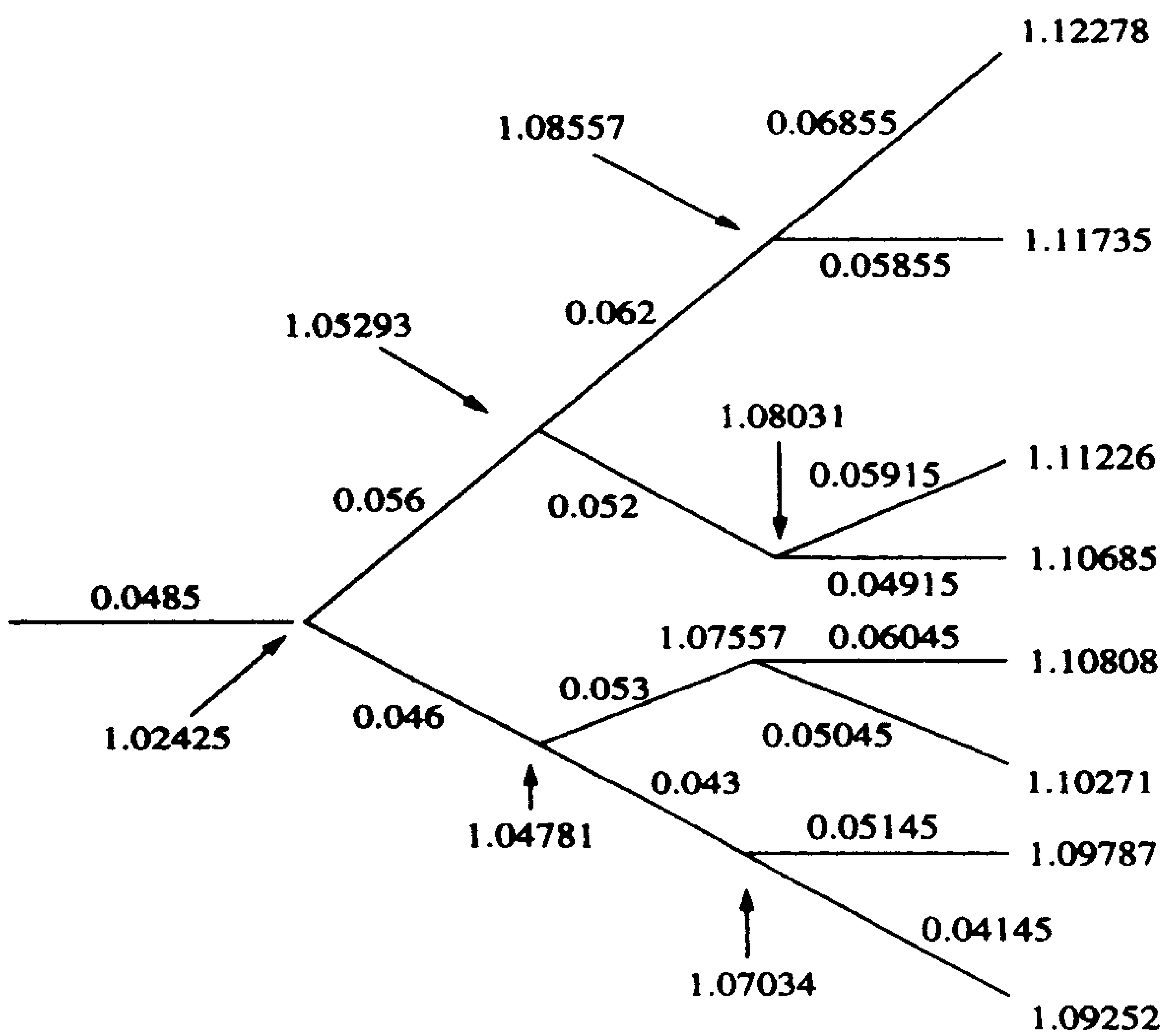


图 9-24　货币市场二叉树图

205

习题

1. 利用以下数据完成均值反转模型的货币市场二叉树图.

- 三个月的远期利率为

  $f_0=0.055$

  $f_1=0.058$

  $f_2=0.0625$

  $f_3=0.055$

  $f_4=0.050$

- 此外，还已知

  $a=0.5$

  $\Delta t=1/4$

  $b=0.03$

  206 $\sigma=0.02$

第 10 章　货币市场和外汇风险

我们参与外汇市场并非是为了金钱.

我们为的是游戏的乐趣.

而金钱只是我们的记分方法.

——George Goodman，独行者

外汇(ForeignExchange，FX)市场，或称货币市场，是所有金融市场中规模最大的. 全球每天交易量为近 2 万亿美元. 世界主要的外汇市场依次为伦敦、纽约和东京.

10.1　交易机制

外汇的字面含义就包含了交换的意思，比如一个人卖出马克而换回了英镑. 外汇有两种习惯的标价方式：

- 美式标价法：多少单位本国货币＝1 单位外国货币. 举例来说，用美式标价法的话，假设美元是本币，而马克是外币，则等式应写成

  0.5434 美元＝1 马克

- 欧式标价法：多少单位外国货币＝1 单位本国货币. 如果像上例假设的一样，美元仍是本币，那么用欧式标价法，应写成

  1.8404 马克＝1 美元

值得注意的是在上述两种标价方法中汇率是互为倒数的关系，所以只要给出其中一个便很容易能计算出另外一个.

习题

1. 2000 年 5 月 16 日的《华尔街日报》列出了以下的(即期)汇率：

美式标价法		
1 美元	＝2.1451	德国马克
1 美元	＝7.1945	法国法郎
1 美元	＝8.1829	丹麦克朗
1 美元	＝0.6638	英镑
1 美元	＝182.49	西班牙比塞塔
1 美元	＝109.48	日元

欧式标价法		
1 比利时法郎	=0.0226	美元
1 瑞士法郎	=0.5859	美元
1 瑞典克朗	=0.1103	美元
1 荷兰盾	=0.4137	美元
1 巴西里拉	=0.5484	美元
1 加元	=0.6424	美元

我们认为美元是本国货币而其他所有的都是外国货币. (1)把所有美式标价法改写成欧式标价法. (2)把所有的欧式标价法改写成美式标价法.

2. 用第 1 题中有关信息可以计算出其他货币之间的等式关系，例如：

$$2.1451\text{ 德国马克} = 1\text{ 美元} = 7.1945\text{ 法国法郎}$$

所以 1 马克=7.1945/2.1451=3.3539 法郎，写出下列货币之间的等式关系：

(a)马克、丹麦克朗

(b)瑞士法郎、荷兰盾

(c)英镑、西班牙比塞塔

(d)日元、马克

(e)丹麦克朗、英镑

(f)法国法郎、日元

(g)加元、英镑

(h)巴西里拉、荷兰盾

(i)瑞典克朗、瑞士法郎

208 (j)比利时法郎、法国法郎

10.2 远期货币：利率平价

在第 1 章中我们曾提到，一个远期的合同是交易双方对在约定时间买卖约定数量商品(如石油、粮食、货币、股票指数)所达成的协议. 在达成协议时并没有金钱的交换. 例如，甲方同意在 2000 年 6 月 17 日以每桶 21 美元的价格向乙方购买 100 万桶石油.

在一个典型的远期合约交易中，一家公司会以马克来交换美元. 两种货币将于未来的某一天结算. 通常交易的另一方为银行. 在这样的交易中，公司购买马克并且卖美元. 那价格是怎样计算的呢? 事实上，价格是由两国的利率和(名义)汇率决定的.

假设一家美国银行正与 ABC 公司进行交易. 银行会在将来给予该公司 1 马克，公司会在同一时间给予银行一定数量的美元. 令

$$S_0\text{ 美元} = 1\text{ 马克(在时刻 } t = 0)$$

$$R_D = \text{美元的无风险利率}$$

$$R_F = \text{马克的无风险利率}$$

在时刻 $t=0$ 时，银行借了 $S_0 e^{-R_F\tau}$ 美元．这些美元转换成 $e^{-R_F\tau}$ 马克：$e^{-R_F\tau}$ 马克以外国(德国)的利率投资．在 $t=\tau$ 时，它们便成为支付给 ABC 公司的 1 马克．为了收支平衡，银行在 $t=\tau$ 的时候必须收到：

$$\begin{array}{cccc}
 & \text{美元} & & \text{马克} \\
t=0 & S_0 e^{-R_F\tau} & \longrightarrow & e^{-R_F\tau} \\
 & \downarrow & & \downarrow \\
 & & & \text{马克} \\
t=\tau & S_0 e^{-R_F\tau}\cdot e^{R_D\tau} & \longleftrightarrow & 1
\end{array}$$

$$S_0 e^{(R_D-R_F)\tau}\ \text{美元} \tag{10-1}$$

公式(10-1)便是凯恩斯著名的利率平价公式．一般来说，M 单位的外币可以兑换

$$MS_0 e^{(R_D-R_F)\tau} \tag{10-2}$$

单位的本币，在这里

$$R_D = \text{本国利率}$$
$$R_F = \text{外国利率}$$
$$\tau = \text{结算日期}$$
$$S_0\ \text{单位本币} = 1\ \text{单位外币}$$

注意如果报出的价格不是(10-2)所给出的价格(无论对买方还是卖方)，都会存在一个没有风险的套利机会． 209

例 我们给出下列数据

1.5065 美元＝1 英镑

短期美元利率＝0.062

短期英镑利率＝0.06

试给出在三个月后付出 100 万英镑的远期交易中以美元报出的价格．

解 我们用利率平价公式

$$F = S_0 M e^{(R_D-R_F)\tau}$$

所以，

$$\begin{aligned} F &= 1.5065 \times 1000000 e^{(0.062-0.06)\times 0.25} \\ &= 1\,507\,253.40(\text{美元}) \end{aligned}$$

习题

1. 我们给出以下数据：

$$\text{短期美元利率} = 0.062$$

短期马克利率 = 0.037

0.462 美元 = 1 马克

试给出在六个月后付出 1 马克的远期美元价格.

2. 给出以下数据：

短期美元利率 = 0.062

短期法郎利率 = 0.039

0.1390 美元 = 1 法郎

试给出在三个月后付出 1 法郎的远期美元价格.

3. 给出以下数据：

短期美元利率 = 0.062

短期日元利率 = 0.02

0.009134 美元 = 1 日元

试给出在两个月后付出 1 日元的远期美元价格.

4. 给出以下数据：

0.5484 美元 = 1 巴西里拉

短期美元利率 = 5.95%

短期巴西里拉利率 = 6.1%

210 试给出在一年后付出一千万里拉的远期合同中以美元标的价格.

10.3 外汇期权

10.3.1 Garman-Kohlhagern 公式[⊖]

接下来我们希望能对外币的期权进行定价，对一些参数如下约定：

S_0 = 外币的即期价格(以本币表示 1 单位外币)

F = 远期价格

K = 执行价格(以本币表示 1 单位外币)

T = 到期时间

$C(S,T)$ = 外汇期权价格(以本币表示 1 单位外币)

R_D = 本币无风险利率

R_F = 外币无风险利率

σ = 即期外汇汇率的波动率

μ = 即期外汇汇率的漂移率

α = 预期证券收益率

δ = 证券收益率的标准差

⊖ 参见 Garman, M., and Kohlhagen, S., "Foreign Currency Option Values," *Journal of International Money and Finance*, 2(1983), pp. 231-238.

我们做如下的假设：

1. 即期的外汇汇率由模型 $dS=\mu Sdt+\sigma SdB$ 给出，在这里 B 是指标准布朗运动.

2. 期权价格只受 S 和 T 的影响.

3. 本国和外国利率都保持不变.

4. 市场价格风险不变：

$$\frac{\alpha_i-R_D}{\delta_i}=\lambda \qquad \text{对于所有证券 } i \tag{10-3}$$

则

$$\frac{\mu+R_F-R_D}{\sigma}=\lambda$$

且

$$\frac{\alpha_C-R_D}{\delta_C}=\lambda \quad \text{其中 } C=C(S,T)$$ 211

把 C 展开成泰勒级数，得到，

$$dC=-\frac{\partial C}{\partial T}dt+\frac{\partial C}{\partial S}dS+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}dS^2+\cdots \tag{10-4}$$

$$dS=\mu Sdt+\sigma SdB \tag{10-5}$$

运用 Ito 定理，我们可以得到，

$$dS^2\approx\sigma^2S^2dt \tag{10-6}$$

把公式(10-5)和(10-6)代入公式(10-4)，得到，

$$dC=-\frac{\partial C}{\partial T}dt+\left[\mu S\frac{\partial C}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}\right]dt+\sigma S\frac{\partial C}{\partial S}dB \tag{10-7}$$

由于：

$$dC=\alpha_C Cdt+\delta_C CdB \tag{10-8}$$

令公式(10-7)和(10-8)相等，可以得到，

$$\alpha_C C=-\frac{\partial C}{\partial T}+\mu S\frac{\partial C}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 C}{\alpha S} \tag{10-9}$$

且

$$\delta_C C=\sigma S\frac{\partial C}{\partial S} \tag{10-10}$$

我们可以把公式(10-3)改写成

$$\frac{\alpha_C C-R_D C}{\delta_C C}=\lambda \tag{10-11}$$

把公式(10-9)和(10-10)代入公式(10-11)，得到

$$\frac{-\frac{\partial C}{\partial T}+\mu S\frac{\partial C}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}-R_D C}{\sigma S\frac{\partial C}{\partial S}}=\lambda=\frac{(\mu+R_F)-R_D}{\sigma}$$

约掉分母中的σ，再交叉相乘，最后可以整理得到，

$$-\frac{\partial C}{\partial T}+(R_D S-R_F S)\frac{\partial C}{\partial S}+\frac{1}{2}\sigma^2 S^2\frac{\partial^2 C}{\partial S^2}=R_D C$$

这个微分方程看起来十分熟悉．事实上，这就是计算分派股利股票股权的 Black-
212 Scholes 方程．如果我们让 $R_F=0$，这就是不分派股利股票的 Black-Scholes 方程．

我们可以考虑一般的边界条件：

1. $C(S,\ 0)=[S_0-K]^+$

2. $C(0,\ T)=0$

3. $\lim\limits_{S\to\infty}\dfrac{C(S,\ T)}{S}=1$

该微分方程的解是

$$C(S,T)=\mathrm{e}^{-R_F T}SN(\mathrm{d}_1)-\mathrm{e}^{-R_D T}KN(\mathrm{d}_2)$$

这里 N 是正态分布，且

$$\mathrm{d}_1=\frac{\ln(S/K)+(R_D-R_F+\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

且

$$\mathrm{d}_2=\frac{\ln(S/K)+(R_D-R_F-\sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

如果我们用远期价格来描述的话，C 的表达式将更清楚一些．调用利率平价公式 $F=S\mathrm{e}^{(R_D-R_F)T}$，我们可以得到：

$$C(S,T)=[FN(\mathrm{d}_1)-KN(\mathrm{d}_2)]\mathrm{e}^{-R_D T}$$

在这里

$$\mathrm{d}_1=\frac{\ln(F/K)+\sigma^2 T/2}{\sigma\sqrt{T}}$$

且

$$\mathrm{d}_2=\frac{\ln(F/K)-(\sigma^2 T/2)}{\sigma\sqrt{T}}$$

10.3.2 看跌看涨货币期权平价公式

就像股票期权有一个看跌看涨平价公式一样，对于货币期权也有一个类似的公式．我们可以从某一对本外币开始．

我们先确定一个看涨的期权 C，以在未来的 T 时刻交割 1 单位的外币．相应地，持有该看涨期权的一方将在交割时向对方付出 K 单位的本币．这里的 K 称为执行价格(以本币表示 1 单位外币)．

设 P 是相同执行价格(以本币表示 1 单位外币)和相同到期日条件下的看跌期权，持有人有权卖出 1 单位的外币．我们假设看跌和看涨的期权都以本币标价．
213 令 S_0 表示今天的即期价格(S_0 单位本币＝1 单位外币)．

我们将进行以下操作：

1. 我们买一个看跌的期权.
2. 我们卖一个看涨的期权.
3. 我们借 $S_0 e^{-R_F T}$ 单位本币.
4. 我们把本币换成 $e^{-R_F T}$ 单位外币.
5. 我们以 R_F 的利率投资这笔钱.

我们总的现金便是

$$P + S_0 e^{-R_F T} - C$$

在 T 时刻我们必须结算. 我们的 $e^{-R_F T}$ 单位外币已经升值为 1 单位外币. 在 T 时刻，即期价格为 S_T.

- 如果 $S_T \geqslant K$，那么我们卖出的看涨期权将会被执行，我们要自己付出 1 单位外币而收到 K 单位本币.
- 如果 $S_T < K$，那么我们只需向看跌期权的卖家付 1 单位外币而收到 K 单位的本币. 所以，无论在 T 时刻即期价格是什么，我们都是付出 1 单位外币而得到 K 单位本币. 因为我们投资了

$$P - C + S_0 e^{-R_F T} \qquad (\text{本币})$$

在期初 $t=0$ 的时候，我们认为：

$$(P - C + S_0 e^{-R_F T}) e^{R_D T} = K$$

所以

$$C - P = S_0 e^{-R_F T} - e^{-R_D T} K$$

应该注意到这项交易是完全确定的，所以如果价格不是 $C-P$ 的话，那么将可以通过套利来获得一个没有风险的利润.

10.4 保证汇率(GER)和交叉货币证券

一个拥有外国股票或股票指数的投资者会遇到两种风险. 第一，他所拥有的股票或股指的涨跌与他预期的相反. 第二，就算股票和股指都与预期的一样涨跌，投资者还面临着外汇的风险. 然而投资者有几种方法可以规避这种风险.

假设一个投资者同意在 T 时刻以远期价格 K 购买股票 S，在这里 S 和 K 都是以外币表示的. 设 T 时刻 1 单位外币的即期价格等于 X_T 单位本币. 214

交易的展开分析 在到期日，在标准情况下，投资者将收到

$$(S_T - K) X_T \qquad \text{单位为本币} \tag{10-12}$$

然而，我们可以达成一个保证汇率(Guaranteed Exchange Rate, GER)的合同，即交易的双方同意采用预先指定的汇率 $X^{=}$，而不受 X_T 的影响. 在这种情况下，在时刻 T 的交易将不受影响，投资者收到

$$(S_T - K) X^{=} \qquad \text{单位为本币} \tag{10-13}$$

那么这样的远期合同是怎样定价的呢？经纪人当然希望 K 能尽可能高以避免损

失，同时又可以赢取利润来抵消风险.

历史事件介绍 带有事先设定汇率的 Nikkei 股指期货自 1986 年在新加坡国际货币交易所开始交易. 人们也可以在美国股票交易所买卖这种预先设定汇率的 Nikkei 股指期货. 这种金融工具也被称为*交叉货币证券*(quantos).

在我们试图对股票的保证汇率进行定价分析以前，让我们先看一下如何规避债券投资的外汇风险.

10.4.1 债券套期保值

假设一个债券在到期日(时刻 $t=T$)可以兑换 Q 单位的外币. 为了套期保值，你达成一项在时刻 T 到期的远期交易. 该交易规定你在到期日向交易的对方付 Q 单位的外币，同时收到

$$D = S_0 e^{(R_D - R_F)T} Q \qquad \text{单位的本币} \tag{10-14}$$

和利率平价公式规定的一样，S_0 单位本币 $=1$ 单位外币($t=0$ 时的即期价格)，$R_D=$ 国内无风险利率，$R_F=$ 国外无风险利率.

尽管这看起来很简单，但套期保值的实际操作过程却是很复杂的. 投资者更希望利用一系列较短的时间段，而不是签一个期限为$[0, T]$的远期合同.

让我们来仔细看看这其中的区别.

定义 当一国的利率低于本国时，这种外国货币被称为升水货币. 相反，如果一国的利率高于本国时，该外国货币称为贴水货币.

一个长期的远期套期保值和一系列短期的套期保值，哪一个更有利呢？我们
215 在表 10-1 中给出了总结. 两者之差指的是国内外利率的差 $|R_D - R_F|$.

表 10-1 考虑汇率风险的债券套期保值说明

	升水货币	贴水货币
利率之差变小	长期为宜	短期为宜
利率之差变大	短期为宜	长期为宜

我们来检验一下，我们从表的左上角开始看，如果利率差变小，$R_D - R_F$ 就会小于 0，但绝对值的值更小，所以你在每个短期会付出更多.

10.4.2 股票的远期保证汇率(GER)定价

让我们再回到股票的例子上，股票和债券有着很大的不同之处. 对于债券来说，我们知道最终到期日收益，并根据这个来计划我们的投资. 而对于股票(或股指)来说，我们甚至在一年前也不能知道它一年后的价值. 这就意味着我们不能简单地买一个期货.

我们希望能对一带有保证汇率或远期交易的外国股票定价. 假设股票是用法郎标价，而本币是美元，令

$X_t = t$ 时刻 1 法郎的美元价格

我们利用我们 X 的价格模型

$$dX = r_X X\,dt + \sigma_X X\,dB \tag{10-15}$$

我们对股价的模型是

$$dS = r_S S\,dt + \sigma_S S\,dB \qquad (\text{单位法郎}) \tag{10-16}$$

在这里，r_S 是未知的，但我们可以从其他的漂移率中算出它. r_S 对 $S(T)$ 的保证汇率(GER)期货的估价来说是非常重要的.

让我们列出我们所需的表达式：

$S(t)=$ 在时刻 t 的股票价值(以法郎计)

$r_D=$ 美元无风险利率

$r_F=$ 法郎无风险利率

$T=$ 股票交割日

$K=$ 股票成交价(以法郎计)

$\sigma_{XS}=$ 股价(以法郎计)与法郎价格(以美元计)的协方差

我们假设该股票是不分派股利的.

在我们进一步计算之前，让我们先回顾一些知识. 216

推导框架与意图

我们将决定以法郎计的股票在到期日的预期价值 K. 保证汇率(GER)的合同还会要求卖家在时刻 T 付出或收到以美元计价的如下差额

$$S_T - K$$

$S_T - K$ 的单位是由法郎表示的. 那么应采用的汇率 X_R 是多少呢? 汇率 X_R 是由双方在 $t=0$ 的时候决定的. 但 X_R 并不需要与现在或将来的即期价格有什么联系. 这样看来，保证汇率的合同执行起来有一些奇怪，它就像是一次赌博，而 X_R 就决定了赌注的大小.

细节问题

现在重新再考虑我们对于 Black-Scholes 期权定价的讨论. 回想一下我们的股票模型是

$$dS = \mu S\,dt + \sigma S\,dB$$

但这个随机微分方程的解有这样的形式：

$$S(t) = S_0 \exp[(\mu - \sigma^2/2)t + \sigma B_t]$$

这里出现了一项奇怪的 $\sigma^2/2$，它是从哪儿来的呢? 答案就是 $e^{\sigma B_t}$ 项并非是不漂移的. 在 $S(t)$ 等式中出现的 $e^{\sigma^2 t/2}$ 项是用来平衡漂移的. 表达式

$$e^{-\sigma^2 t/2} e^{\sigma B_t}$$

是不漂移的. 所有的漂移现在都包含在 $e^{\mu t}$ 项中.

由于 t 是固定不变的，所以在接下来的讨论中我们将把 B_t 写成 $\sqrt{t}Z$，而把 $S(t)$ 和 $X(t)$ 写成以下的形式：

$$S(t) = S_0 e^{r_S t} e^{-\sigma_S^2 t/2} e^{\sqrt{t}\sigma_S Z} \tag{10-17}$$

和

$$X(t) = X_0 e^{r_X t} e^{-\sigma_X^2 t/2} e^{\sqrt{t}\sigma_X Z'}$$

这样我们就能很容易控制漂移．随机项 Z 和 Z' 是两个标准正态分布（应该是相关的）．我们的部分推导参考了 Derman、Karasiinski 和 Becker[㊀] 提出的表达式．

以美元计的股票的增长率

以美元计的股票的增长率或漂移有两个影响因素：以法郎计的该股票的增长率和汇率．我们采用一个模型，它把任何资产的所有漂移表示为 r_D．当我们计算
217 股票漂移的时候，可直接令它等于 r_D．

首先我们应注意一项用法郎计价的投资是不同的资产．当该投资在一家法国银行获得利息然后把获利转换成美元的时候，我们将得到的漂移为 $r_F + r_X$，即：

$$r_D = r_F + r_X \tag{10-18}$$

现在我们用 $E[(S(t)X(T)]$ 项来确定以美元计的股票漂移．注意，这里的 $S(t)$ 和 $X(t)$ 并不是互相独立的．由公式(10-17)，有：

$$E[SX] = S_0 X_0 e^{(r_S+r_X)t} e^{-(\sigma_S^2+\sigma_X^2)t/2} E[e^{\sqrt{t}(\sigma_S Z+\sigma_X Z')}]$$

但随机项

$$\sigma_S Z + \sigma_X Z'$$

是正态分布的，它的方差是 $\sigma_S{}^2 + 2\sigma_{XS} + \sigma_X{}^2$．我们可以采用与以前相同的方法得到 $E[e^{\sigma Z}]$

$$E[\exp\{\sqrt{t}(\sigma_S Z + \sigma_X Z')\}] = \exp[t(\sigma_S{}^2 + 2\sigma_{SX} + \sigma_X{}^2)/2]$$

接着我们得到等式

$$E[S(T)X(T)] = \exp[(r_S + r_X + \sigma_{XS})t]S(0)X(0) \tag{10-19}$$

这个等式表明以美元计股票的漂移是

$$r_S + r_X + \sigma_{XS}$$

因为任何资产的漂移等于 r_D，我们把它放在等式(10-18)的左边：

$$r_F + r_X = r_S + r_X + \sigma_{XS} \tag{10-20}$$

简化式(10-20)，得到

$$r_F = r_S + \sigma_{XS} \tag{10-21}$$

所以

$$E[S(T)] = S_0 e^{r_S T} = S_0 e^{(r_F - \sigma_{XS})T} \tag{10-22}$$

我们令

$$K = E[S(T)] = S_0 e^{(r_F - \sigma_{XS})T} \tag{10-23}$$

注意到根据协定的汇率，在时间 T，股票以美元计价的预期价值是

㊀ 参见 Derman, E., Karasiinski, P., and Becker, J., "Understanding Guaranteed Exchange Rate Contracts in Foreign Stock Investments,"in De Rosa, David, ed., *Currency Derivatives*, Wiley, New York, 1998, pp. 329-339.

$$E[X_RS(T)] = X_RS_0e^{(r_F-\sigma_{XS})T} \tag{10-24}$$

所以

$$E[X_RS(T) - X_RK] = 0$$

从预期价值来看，该合约是一项公平的交易(参见 9.1.1 节). 在到期日 T，合约持有者向卖方付 KX_R 美元，而得到股票资产为 S_TX_R 美元. 在实际操作中，卖 218
方的支付或者说远期合约持有者将得到

$$(S(T) - K)X_R \quad (\text{美元})$$

股票(或股指)的保证汇率(GER)远期合约的拥有者可以避免任何汇率上的突变.

10.4.3 保证汇率的看跌看涨期权的定价

为一外国股票的保证汇率的看跌或者看涨期权定价，我们可以根据国内股票的方法步骤. 令

$S(t)$ = 在时间 t 的股票价值(以法郎计)

K = 执行价格(以法郎计)

r_D = 美国无风险利率

r_F = 法国无风险利率

T = 股票交割日

σ_S = 股票波动率

σ_{XS} = 股价(以法郎计)与法郎价格(以美元计)的协方差

X_R = 协定汇率(以美元表示一单位法郎)

为了对一不分派股利的股票的欧洲看涨期权进行定价，我们必须找出到期时的期望价值

$$\max[S(T) - K, 0]X_R \tag{10-25}$$

这个看涨期权的价格为

$$E[\max[S(T) - K, 0]]X_Re^{-r_DT} \tag{10-26}$$

所以

$$C = [S(T)e^{(r_F-\sigma_{XS})T}N(\mathrm{d}_1) - KN(\mathrm{d}_2)]X_Re^{-r_DT} \tag{10-27}$$

这里

$$\mathrm{d}_1 = \frac{\ln(S(0)/K) + (r_F - \sigma_{XS} + \sigma_S^2/2)T}{\sigma_S\sqrt{T}}$$

和

$$\mathrm{d}_2 = \frac{\ln(S(0)/K) + (r_F - \sigma_{XS} - \sigma_S^2/2)T}{\sigma_S\sqrt{T}}$$ 219

10.5 是否套期保值与套期保值数量的决定

关于货币风险的套期保值有很多争议. 但有一点似乎已成共识，固定收益的

投资应该套期保值[1][2][3]．关于权益性资产及股票指数则尚不清楚，但有一些很不
220 错的文献[4][5][6][7]．

[1] 参见 Black，F.，"Universal Hedging：How to Optimize Currency Risk and Reward in International Equity Portfolios，"*Financial Analysts' Journal*(July/August1989)，pp. 16-22.

[2] 参见 Black，F.，"Equilibrium Exchange Rate Hedging，"*Journal of Finance*，45，3(July1990)pp. 899-907.

[3] 参见 Perold，A.，and Schulman，E.，"The Free Lunch on Currency Hedging：Implications for Investment Policy and Performance Standards，"*Financial Analysts Journal*(May/June1988)，pp. 46-50.

[4] 参见 Gastineau，G.，"The Currency Hedging Decision：A Search for Synthesis in Asset Allocation，"*Financial Analysts' Journal*，1997.

[5] 参见 De Rosa，David，*Managing Foreign Risk*，Irwin，Chicago，1996.

[6] 参见 Frrot，K.，"Currency Hedging over Long Horizons，"Working Paper No. 4355，*National Board of Economic Research*，May1993.

[7] 参见 Piros，C.，"The Perfect Hedge：To Quanto or Not to Quanto，"in De Rosa，David，ed.，*Currency Derivatives*，Wiley，New York，1998，pp. 340-353.

第11章　国际政治风险分析

“唱戏的是疯子，看戏的是傻子”.

——中国俗语

11.1　介绍

1997年夏，泰国铢的崩溃标志着席卷东南亚的一系列金融危机的爆发. 尽管危机开始仅集中于该地区，全球的新兴市场很快便面临严峻的经济问题. 从印度尼西亚到巴西，金融崩溃导致了数百万人实际生活标准的降低. 然而，危机的影响还不只限于新兴市场. 在华尔街，很多金融机构因为在新兴市场的头寸而蒙受了巨额的损失. 也许最能说明问题的是，当1998年8月俄罗斯卢布崩溃时，聘有两名诺贝尔奖获得者的长期资本管理公司(LTCM)也因为在新兴市场的投资而损失了数十亿美元. 美国联邦储备局的官员们因为担心LTCM的破产会引起市场恐慌，发动华尔街十四家银行集团对公司进行了高达36亿美元的巨额重组.

一些经济学家指出新兴市场的危机将对全球经济产生举足轻重的影响. 经济预测模型也显示亚洲出现的问题将使美国1998年经济增长率调低0.5到1个百分点[㊀]. 克林顿总统首次任期内的经济顾问 LauraD'AndreaTyson 写道： 221

> 亚洲金融危机堪称当代最严重的危机之一，它不仅为亚洲经济，也为包括美国在内的全球经济带来严重的紧缩风险；而且还威胁着与美国国家安全利益息息相关的地区地缘政治稳定.

由这些新兴市场危机所导致的混乱凸现了在国际投资中的固有风险. 虽然全球化为经济发展提供了大量机会，但也伴随着一定的风险. 如何应对这些国际风险正成为金融机构的一项日益重要的任务. 本章共包括五个部分：(1)纵览投资者所面临风险的种类；(2)介绍应对这些风险的技术；(3)详述国家风险衍生产品；(4)介绍分析国际政治风险的方法；(5)阐释两种可用来评估政治风险的债券定价模型.

11.2　国际风险的种类

风险是遭受损害或损失的可能性，国际投资者需要应对两种不同类型的风险：1. 商业或市场风险；2. 政治风险.

投资者或企业家为从原始投资中赚取收益而承受市场风险. 高风险通常意味着高回报，所以市场风险和潜在收益之间存在着正相关关系. 例如，如果你投资

㊀ 参见 Pearlstein, s., "Understanding the Asian Economic Crisis," *The Washington Post*, January 18, 1998, P. A32.

一家处于起步阶段的小型网络公司而不是一家业绩稳固的集团公司，则可能有机会赢得更高的回报，然而同样也用可能造成比投资大公司更大的亏损.

政治风险是国际投资者承受的另一种风险.

11.2.1 政治风险

政治风险是指由于政府或者政治团体采取的措施对商业活动产生不利影响的可能性. 市场风险和政治风险的关键区别在于后者并不涉及任何风险一收益的权
222 衡，亦即伴随高政治风险的投资并不能比低政治风险的投资带来更高的潜在收益. 因此，尽管投资者会寻求市场风险作为赚取经济回报的一种方法，但较高水平的政治风险并不提供任何较高回报的保证，承受风险未必取得回报. 另一个关键的区别在于市场风险取决于市场，而政治风险的结果则取决于政治舞台. 因此对公司而言，政治风险往往比市场风险有更大的影响力. 即，公司可以自主决定生产什么、在哪里生产，以及其他一些商业决策，但它对于政治事件却无能为力.

政治风险分为两种：统治风险和非统治风险. 统治风险指政府采取的影响商业经营活动的举措. 例如，二次世界大战之后几年间，中欧和东欧的社会主义政府没收私人企业. 还有其他一些没有这么严重的统治风险，包括货币风险和税制或其他法规变化所引发的风险. 非统治风险指由非政府组织采取的对商业活动有一定影响的举措. 以商家或公司经理人员为目标的恐怖主义团体是非统治风险的一大来源. 类似的有组织的犯罪也是非统治风险的一种形式. 例如，在前苏联的很多地方投资者和企业家将有组织的犯罪列为投资的一项重要障碍.

11.2.2 国际风险管理

国际风险管理可以追溯到希腊城邦时代，那时轮船货运公司提供防范国际损失的保险[⊖]. 为发展全球商业贸易，商人们需要一种保护自己不遭受致命损失的方法. 政治风险保险的最早形式是对商人货运船遭遇海盗的情况作出补偿. 继而，国际风险管理在威尼斯、热那亚以及距今更近一些的伦敦等贸易和船运中心发展起来.

11.2.3 分散化

东南亚危机的全球效应表明，应对国际风险对于现今的商业和投资者来说至关重要. 随着当代国际贸易和商务规模的急剧增加，应对风险的机会也增多. 也许应对国际政治风险的最简单的方法就是地理上的分散化投资. 与国内投资者采
223 取跨行业的分散组合投资来对冲单一行业表现欠佳带来的风险很相似，国际投资

⊖ 参见"Haufler, V., *Dangerous Commerce: Insurance and the Management of International Risk*, Cornell University Press, Ithaca, NY, 1997"中关于利率管理的发展及其对贸易商务的重要性.

者也可以通过投资于不同国家来分散风险. 例如，一家跨国公司会在全球不相关的若干个地方建立工厂以对冲在其中任何一个特定国家投资的风险. 为了使这种策略发挥效用，公司的投资范围必须在政治风险高度不相关的不同国家. 譬如对于在罗马尼亚的政治风险，投资于东南亚就会比投资于东南欧起到更好的风险对冲作用.

这种方法的一个主要缺陷是分散化并不是总是可行的. 在一些情况下，投资规模如此之大，事实上很难通过另一项投资来抵消风险. 近年来，石油公司在里海地区投入巨资，用于开发它们认定分布于该地区的石油和天然气资源. 例如，美孚、埃克森、Conoco 和 Frontera 能源公司为取得阿塞拜疆油田的部分所有权，于近期签下了数十亿的巨额合约.《金融时报》称，国外石油产商仅在阿塞拜疆一处就打算斥资 500 亿美元[1]. 除了正常的市场风险，将石油和天然气输送到欧洲和美国的种种困难和实际储备远小于估计量的可能性，都使石油公司承担了巨大的政治风险. 里海沿岸的每一个国家——俄罗斯、阿塞拜疆、伊朗、土库曼斯坦和哈萨克斯坦——近年来都饱经严重的政治动乱. 在该地区，大规模国际投资的政治风险是不容小觑的.

既然油气资源仅分布在特定的地区，在该行业实施地理分散化投资的机会就大大受到限制. 此外，投资的规模也使石油产商很难在其他地区重复开发如此大规模的项目. 因此，这些公司必须寻求其他方法来抵消在里海地区投资的巨大政治风险.

11.2.4 政治风险保险与出口信用保险

政治风险管理的另一方法就是直接投保政治风险. 该险种在私营和公共机构都有，它为应对政治风险提供特定的保险范围. 例如，伦敦劳埃德保险社(Lloyd's)设计了针对没收充公、政治风险和恐怖主义等众多其他威胁的保险条款. 另一家大保险公司，美国国际集团(AIG)，也提供针对大量政治风险的类似保险范围. 政府机构，像美国海外私人投资公司(OPIC)也提供此类险种.

出口信用保险提供了对冲国际政治风险的另一种方法. 保险公司或政府机构向贷款给国外组织购买本国商品的私人银行提供担保. 例如，美国进出口银行(Ex-Im Bank)为购买美国商品和服务的国际买家提供还贷担保，而且还为防范因 224
政治或商业原因引起的国外买家未偿付风险提供信用保险. 举一个典型的例子，美国进出口银行对南方信用银行(Southtrust Bank)给予购买美国制造商价值 100 万美金的医疗器械的一家西非医院的贷款额度做了担保[2].

虽然保险毫无疑问对于对冲一些国际政治风险有效，但它往往非常昂贵. 而且，保护一些国际投资的涵盖面较广的保险并不总是存在. 这使得涉及国际政治

[1] Whalen, J., "Survey-World Energy: Western Groups Harbour High Expectations: Azerbaijan and Georgia", *Financial Times*, June 10, 1999.

[2] 本例和其他例子可以参见进出口银行网页：http://www.exim.gov/.

风险管理的人们把目光投向巨大的衍生产品市场，将其作为风险管理的工具.

11.3 信用衍生产品与政治风险管理

自从 Black 和 Scholes 发表了关于期权定价的影响深远的论文之后，衍生产品市场经历了长足的发展. 截止 20 世纪 90 年代中期，为应对各种形式的违约风险设计的信用衍生产品已经形成了一个市值估计达 2000 亿美元的市场. 虽然市场正在发展迅速而很难准确测算，但分析家估计到 2000 年交易量将跃升至 1 至 2 万亿美元. 琳琅满目的信用衍生产品市场产品往往令人目不暇接，它们各自的应用也大不相同. 本节旨在描述设计用来对冲国际政治风险的各种信用衍生产品.

11.3.1 外汇及其衍生产品

对于国际投资者来说，将外币兑换成本币是一个至关紧要的问题. 衍生产品使投资者可以对冲货币贬值的风险. 对冲货币风险最常见的衍生产品形式是期货合同. 正如在第 1 章和第 11 章的论述，期货合同是确定性的合约，这样它们的定价就比较直观.

除了实际汇率因素，在外汇兑换过程中还涉及其他风险. 在很多情况下，政府出于各种政治原因，限制个人用本币兑换外币的数额. 这样国际投资者不论实际汇率如何，都要面临不能兑换本币的问题. 例如，一家在阿根廷投资的公司可以购买一个衍生产品合约，防范阿根廷政府不允许兑换货币的可能性. 如果在合约期内政府果真宣布限制外币自由兑换，出售保护条款的银行或其他金融机构将向这家公司支付合约规定的金额(该金额取决于合约标定的、尽管不太容易产生
225 的汇率).

11.3.2 信用违约风险及其衍生产品

每当双方订立某项合约，某一方甚至双方都不履行合约明确规定的所有义务的可能性总是存在的，信用违约保险就是为了防范这种风险而设计的. 面临政治风险的投资者通常可以向银行或大型金融机构购买外国政府违约情况下提供偿付的合约. 当所需险种不存在或者太过昂贵时，投资者常常把目光投向这种可以对冲部分甚至全部政治风险的衍生产品. 保护条款的购买方支付一定费用并且在相关资产发生违约时获得偿付.

图 11-1 显示投资者购买信用衍生产品对冲政治风险的最简单的情形. 相关资产，通常为外国公司或政府的债券，一旦发生违约，购买方就可以从出售方获得偿付. 如果没有违约，出售方就保有衍生产品原先收取的费用，而购买方将得不到任何偿付.

国外投资对冲的一项重要策略就是购买国家风险衍生产品. 这种合约基于国家债券并且当外国政府对其债务违约时，对购买者提供偿付保护. 如图 11-2 所

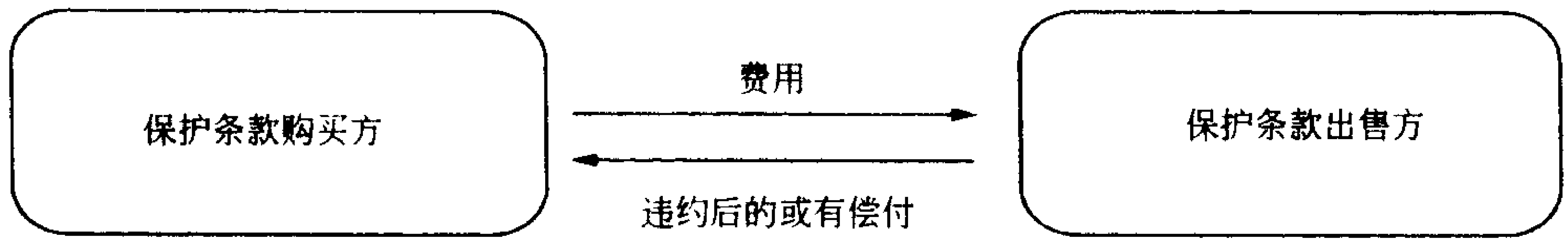


图 11-1 信用衍生产品的违约风险保护

示，购买方支付费用给出售方，通常为一定数量的基点．如果相关外国政府在其国家债券出现违约时，购买方可以获得事先确定的偿付数额．一旦政府债务出现违约，投资者就可以通过衍生产品所得来抵消政治风险带来的损失，从而对冲国家风险.

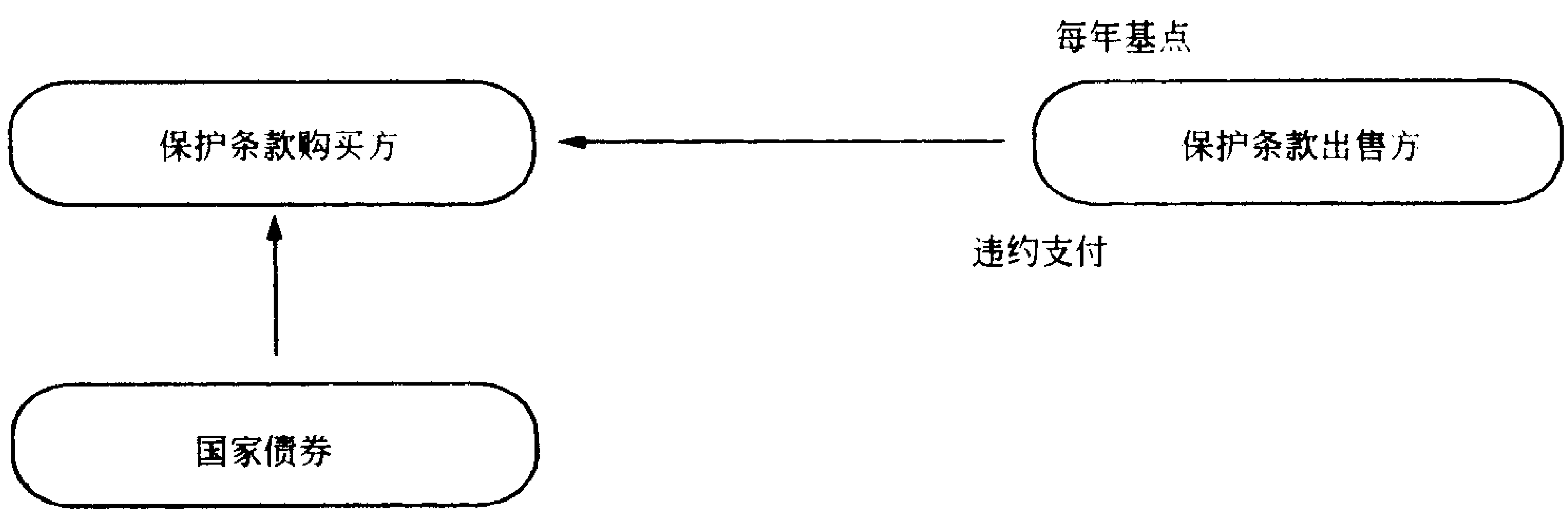


图 11-2 国家风险衍生产品

国家风险衍生产品的具体实例⊖

数年前，美国的一家高科技公司投资 1 亿美元在墨西哥建造工厂，寻求对冲投资过程中伴随的政治风险．它担心战争、工人罢工、没收充公或者政变的风险会破坏其经营．保险费太过昂贵，于是这家公司决定采用信用违约衍生产品来对冲政治风险．除了成本较低以外，衍生产品还有比保险合约更快获得偿付的优点.

这种特定的衍生产品的相关债券是由墨西哥政府发行的以美元定价的债券．公司为一年期 1 亿美元的合约支付 75 个基点的费用．如果信用违约情况发生，这家美国公司可以获得等于(1 亿美元×信用问题发生时债券的市值)的偿付．这样，如果国家债券损失一半的面值，公司就可以获得 5000 万美元的偿付．合约定义信用事件如下：

破产事件和政府违约支付，或者干扰外汇交易的任何战争、革命、起义以及恶意行为，或者没收、充公、征用以及非本地银行的国有化，本地银行宣布延期

⊖ 本例摘自 Tavakoli, J. M., *Credit Derivatives: A Guide to Instruments and Applications*, New York: Wiley, 1998, pp. 84-87. Tavakoli 的书并没有讨论信用违约衍生产品的数学定价方法，但提供了很好的对各种产品的概览和许多应用实例.

或者暂停偿付.

此外，合约还规定违约支付指政府未能“按时支付任何不少于 1000 万美元的相关资产”，破产事件指“债券发行人宣布不少于 1000 万美元数额的缓期支付”. 如果墨西哥发生严重的政治或经济问题，政府债券的价格会下跌，保护条款购买者会根据债券价格的跌幅得到偿付.

注意公司的政治风险并不是和国家风险衍生产品完全相关的. 当然，理想化的管理目标当然是当发生政治风暴的时候，公司可以获得与在政治事件中的损失等量的偿付. 正如前文讨论，公司可以购买能够提供完全抵消墨西哥工厂因为政 226~227 治事件而遭受的任何损失的保险，但是由于保险的较高费用和索赔的费时程序，保险并不是最佳选择. 虽然信用衍生产品并非和公司由于严重政治事件的损失完全相关，但可以提供抵消潜在损失的部分偿付. 当然，保护条款的购买方会尽量确保其面对的风险和基本资产(本例中为国家债券)紧密相关.

11.4 国际政治风险的定价

前文讨论，国家风险衍生产品的价格是每年 75 个基点. 实质上，衍生产品体现了合约的一年期限中在墨西哥投资所固有的国家风险的准确市场价值. 市场参与者是如何确定国家风险的合理定价的呢? 得到这个答案是非常困难的[1]. KeithLewis(目前就职于美洲银行)谈到，“当考虑信用衍生产品时，经典的风险中性定价模型几乎毫无价值.”JanetTavakoli 非常同意这种观点，他指出，“供需推动市场”，基于违约风险的金融资产定价的最根本的问题在于确定违约的概率. 不论相关债券是公司债券还是国家债券，违约的可能性总是存在. Tavakoli 把这种违约的可能性称为“不可知的未知数”.

新兴市场特有的困难增加了定价的难度. 因为新兴市场一般含有最高等级的国家风险，那些困难和政治风险的定价尤其相关. 与在美国和欧洲发展成熟的市场相比，新兴市场有着更高的波动性，较少的交易商、定价数据、金融工具和定价信息来源(例如彭博财经，Bloomberg's)以及较高的信用事件风险. 此外，即使在联系不很紧密的市场，新兴市场信用风险依然显示出相关性. 例如，根据国际货币基金组织(IMF)的研究[2]，1997 年泰国的危机以巨大的影响力和持久性迅速扩展到印度尼西亚、马来西亚和菲律宾，继而是韩国，并且更快地影响到该地

---

[1] 国家风险分析所需的条件从高级技术到敏感的直觉. 本章讨论的方法集中在国家风险定价的数学模型. 然而，一些经理人更依赖直觉，美国一家大型制药工厂的负责公司在拉丁美洲运作的执行官为后面一种方法提供了很好例证. 他告诉我一次他前往拉丁美洲一国家视察公司运营情况，当时刚好是在新政府选举之后. 新当选总统的演说让他想起他 20 世纪 60 年代初还是一名年轻人时所听到的 Fidel Castro 的言论. 考虑到新政权下的政治风险，他结束了在该国所有的公司运营.

[2] “Financial Crises: Characteristics and Indicators of Vulnerability,” *World Economic Outlook*, International Monetary Fund . May1, 1998.

区内的香港、新加坡和台湾，以及其他地区的一系列新兴市场经济. 228

信用差价和债券的风险溢价

国家风险定价的一种重要方法是比较新兴市场债券和通常以美国政府债券作为基准的无风险资产的收益. 收益差价，即风险债券与可比的(指剩余到期时间长度)美国政府债券收益率之差，为某一特定国家的政治风险量提供了一种市场测度. 例如，1999 年 7 月 28 日墨西哥政府债券和美国国债的收益差价为 4.62%，或者说成 462 个基点. 注意到这种特定的债券是以美元计价的，所以比较两种资产并不需要考虑美元对比索的汇率㊀.

表 11-1 提供了其他由新兴市场国家发行的以美元计价的债券收益差价的例子. 对于表中所列每种国家债券，收益差价给出了相对于无风险的美国国债而言㊁，新兴市场债券风险增量的测度. 内在的收益差价是借贷国家债券违约的可能性，亦即 Tavakoli 所描述的“不可知的未知数”的市场指标. 这样，可以精确确定收益差价的模型就包含了投资该债券所固有的信用风险的信息. 而这又是前文讨论的这种国家风险衍生产品定价的关键信息. 回忆那家美国公司支付 75 个基点以对冲在墨西哥 1 亿美元的投资. 该价格说明了在衍生产品持续期内墨西哥债券固有的超额风险.

表 11-1 新兴政府债券的信用等级和收益差价

国家债券	偿还日期	标准普尔等级	相对美国政府债券收益差价
克罗地亚	03/2006	BBB−	2.55
斯洛文尼亚	03/2009	A	−0.18
匈牙利	02/2009	BBB	−0.07
阿根廷	09/2027	BB	7.47
巴西	05/2027	B+	8.27
墨西哥	05/2026	BB	4.62
中国	12/2008	BBB+	2.23
菲律宾	01/2019	BB+	4.27
韩国	04/2008	BBB−	2.57
黎巴嫩	07/2000	BB−	1.84
南非	04/2008	BB+	3.04
土耳其	09/2007	B	5.53

㊀ 即使债券以美元计价，也并不意味着汇率是无关的. 即期的汇率对于决定政府能否履行其义务有重要的关系. 例如，如果新兴市场的货币崩溃，政府支付以美元计价的债券将变得更加困难，因为这需要更多的本币. 于是，虽然汇率不是比较美国国债和以美元计价的新兴市场债券的明确的因素，但是它是一个重要的潜在因素.

㊁ 注意国家风险并非收益差值的惟一决定因素. 税收考虑、资本管制、本国偏好、当地市场条件和其他因素都会影响新兴市场债券的供需关系.

11.5 决定风险溢价的两个模型

为简便起见，第 8 章讨论的债券定价模型假设债券无风险. 但即使是对于被认为是世界上风险最低的美国债券，这种假设也不完全准确. 对于新兴市场的债务，没有违约风险的假设很明显是不可行的. 为了解决这个问题，分析家发展了为风险债务定价的数学模型. 一类模型是基于 Black 和 Scholes 有关期权定价的重要论文. 这种方法把违约的概率看作内生变量. 第二种方法将信用违约风险看作基于信用等级而给定，然后利用这些信息计算收益差价. 下面两部分讨论这两种风险债务定价广泛使用的方法.

11.5.1 风险债务定价的 Black-Scholes 方法

诺贝尔经济学奖获得者 RobertMerton 将 Black-Scholes 的金融工具定价方法应用于公司债券. Merton 的模型提供了一种计算风险债券和无风险债券之间收益差价的方法[⊖]. 第一步是描述公司价值的动态变化过程：

$$dV = (\mu V - C)dt + \sigma V dB \tag{11-1}$$

其中：

μ = 公司价值的预期收益率

C = 公司单位时间对股东的支付

σ^2 = 单位时间收益的方差

B_t = 标准布朗运动

229~230 这样，公司价值的变化由公司收益率，减去其对股东的支付，加上公司价值的随机变化量来决定.

假设一证券的市场价值 Y，可以写成公司价值 V 和时间的函数：

$$Y = F(V,t) \tag{11-2}$$

为更清楚讨论该证券，我们先举 $C=0$ 的情形（没有公司的对外支付），我们又假设证券未分配股利.

在这种情形下，你会认识到，Y 可以基于分析公司的价值 V 作为衍生证券来建模. 同时，当 $C=0$ 时方程(11-1)就是我们在第 6 章中熟悉的几何布朗运动的模型. 我们可以利用第 6 章中 Black 和 Scholes 的方法得出 $Y=F(V, t)$ 的如下偏微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{vv} + rVF_v + F_t = rF \tag{11-3}$$

方程(11-3)是证券价值满足公司价值和时间的函数的任何证券的偏微分方程. 通过运用不同的边界条件，可以描述不同种类的证券（例如股票与债券）. 在

⊖ 参见 Merton, R. C. "On the Pricing of Corporate Debt: The Risk Structure of Interest Rates," *Journal of Finance*, 29, 2(May 1974), pp. 449-470.

本部分，我们将运用特定的边界条件来得到风险和无风险债券的差价．注意到除了公司的价值和时间，F 还决定于利率 r 和公司价值的波动 σ^2．

零息债券

我们假设公司发行的零息债券的价值可以表达为 $F(V,\ t)$．那么，运用(11-3)，我们有如下债券价格的偏微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 F_{vv} + rVF_v - rF - F_\tau = 0 \tag{11-4}$$

其中 $\tau = T - t$ 是到期前时间长度，于是，$F_t = -F_\tau$．要解方程(11-4)，我们需要两个边界条件和一个初始条件．这些条件由利率期限结构推导而得．

根据定义，公司的价值等于股权价值加上发行债券的价值($V = F(V,\ \tau) + f(V,\ \tau)$，其中 f 是公司股权的价值)．根据美国关于有限责任的法律，股权的价值和债券的价值不能为负[1]．如果公司的价值为零，那么股权和债券的价值也分别为零．于是，

$$F(0,\tau) = f(0,\tau) = 0 \tag{11-5}$$

此外，证券的价值不能超过公司的价值($F(V,\ \tau) \leqslant V$)，表明：

$$\frac{F(V,\tau)}{V} \leqslant 1 \tag{11-6}$$ 231

初始条件由公司在到期日支付给债券持有人数额 B 的事实推导而得．如果在到期日公司的价值 V 小于支付额 B，公司将会违约，债券持有人将仅得到 V．如果公司的价值大于债券支付的价值，公司会支付 B．这样，在到期日，债券的最小价值将为公司价值和支付价值之中的较小者．由此，初始条件如下：

$$F(V,0) = \min\{V,B\} \tag{11-7}$$

由(11-12)、(11-13)和(11-14)三个条件，直接解出(11-4)，得到债务的价值是可行的．然而，Merton 通过对一个已经知道解法的近似问题的分析给出了(11-14)的答案．

要确定股权价值 $f(V,\ \tau)$，我们注意到等式 $f = V - F$，将其代入(11-4)中的 F．结果得到 f 的偏微分方程：

$$\frac{1}{2}\sigma^2 V^2 f_{vv} + rVf_v - rf - f_\tau = 0 \tag{11-8}$$

满足：

$$f(V,\tau) = \max\{0,V - B\} \tag{11-9}$$

约束还包括两个边界条件(11-5)和(11-6)．初始条件说明当公司债务到期时，股权价值等于公司价值减去对债权人的支付．如果公司价值小于支付，股权再无价值．这一初始条件来源于美国的法律，它规定公司有义务在支付股权人之前

[1] 有限责任意味着购买公司股份的投资者仅仅对他(她)投资的数量负有责任．假如一家公司败诉，被要求赔偿远远超出其资产的损失．公司将破产清偿，股东不对公司的债务负责．一旦他们所持股份的价值跌为零(因为公司的破产)，股东将不会遭受更多损失．

先支付债权人．这样，股东将获得 $V-B$，直到差值小于零．在这种情形下，由于股东仅为有限责任，他们将一无所获，同时也不再有继续偿付债权人的义务．

注意到如果你分别用股票价格 S 和执行价格 X 替换公司价值 V 和债务支付 B，方程(11-8)和(11-9)与第 6 章中欧式看涨期权一致．这样，我们可以将看涨期权的解决方法应用到风险债务的情形．当 σ^2 为常数时，

$$f(V,\tau)=VN(d_1)-Be^{-r\tau}N(d_2) \tag{11-10}$$

其中

$$d_1\equiv\frac{\left[\ln\left(\frac{V}{B}\right)+\left(r+\frac{1}{2}\sigma^2\right)\tau\right]}{\sigma\sqrt{\tau}}$$

$$d_2\equiv d_1-\sigma\sqrt{\tau}$$

由等式(11-10)和 $F=V-f$，我们可以写出发行的债务的价值：

232 $$F(V,\tau)=V(1-N(d_1))+Be^{-r\tau}N(d_2)$$

于是，

$$F(V,\tau)=Be^{-r\tau}\left(N(d_2)+\frac{V}{B}e^{r\tau}N(-d_1)\right) \tag{11-11}$$

等式(11-11)提供一种风险债务定价的方法．然而，要计算衡量债券发行风险的收益差价，我们可以将(11-11)改写如下：

$$F=B\exp[-R(\tau)\tau]$$

亦即，我们把该风险债券的收益定义为：

$$R(\tau)=-r-\frac{1}{\tau}\ln\left(N(d_2)+\frac{V}{B}e^{r\tau}N(-d_1)\right) \tag{11-12}$$

注意风险溢价仅为下面两个变量的函数：

1. 公司运营的方差(或波动)σ^2
2. 承诺支付额的现值(在无风险利率下)与公司现值的比率，即 $V/Be^{-r\tau}$

运用 Black-Scholes 模型计算风险溢价

Merton 将 Black-Scholes 模型用于公司债务的定价，因此如果我们想要求出公司债券的收益差价(例如风险溢价)，我们必须计算 σ^2 和 d．假设价值 100 万美元的公司有 50 万美元发行在外的债券一年后到期．要确定这些债券的风险溢价，我们需要知道方差 σ^2 和当前利率 r．假设它们分别为 0.25 和 0.5．于是我们有：

$V=1\ 000\ 000$

$B=500\ 000$

$\sigma^2=0.25$

$\tau=1$

将这些值代入(11-12)得到如下结果：

$d_1=1.236294361$

$d_2=2.236294361$

$N(d_1)=0.04125586$

$N(d_2)=0.891825352$

$R(\tau)=0.021665473$

于是，这些债券如果以5%为无风险利率基准，其交易溢价为2.17%.

Merton的模型是设计用来计算公司债券的风险溢价，然而模型同样适用于政府债券．于是我们就可以计算国家债券的风险溢价．回忆若要求风险溢价，模 233
型需要知道公司价值和公司价值的波动．政府就像公司一样，有包含资产项和负债项的资产负债表，并且资产负债表的表现随时间变化，因此政府的“价值”也在波动．像美国政府一样，很多外国政府也在借款并且持续长时间地借款．此外，政府可以以税收的形式向公民索取资源．然而，正如政府可以向公民索取的量是有限的，政府的借贷也是有限的．更进一步，对于政府来说，并没有一个必须提供服务的最低水平．于是，如果债务支付太过庞大，政府不会再通过借贷、征税以及大量削减开支来满足偿付义务．结果政府有时也会对债务违约．

例如，1998年俄罗斯政府就对部分债务违约，因为它无法再承担所需的利息支付．前文描述的模型可以求出风险溢价，继而提供衡量国家风险的一些方法．假设一小国政府已经处于100亿美元的违约水平，又假设该数据包括80亿发行在外的债务，并且政府价值的波动率是0.75．于是我们有：

$V=10\ 000\ 000\ 000$

$B=8\ 000\ 000\ 000$

$\sigma^2=0.75$

$\tau=0.5$

根据模型，该国债务的风险溢价是33%，非常之高．原因在于该国已经非常接近债务无法持续的极限．此外，较高水平的波动率表明政府债券可能要超过极限陷入违约状态．于是，如果政府资产负债表的价值及其波动率已知，Merton的分析可以直接应用于分析国家债券的差价．

11.5.2　风险债务定价的其他方法

许多作者指出应用Merton模型所必须用到的公司价值很难确定．此外，也有批评指出很难精确地确定所有负债的结构和数量．于是，分析师们开发了一些模型以期避免所说的这些问题．有一种解决方法建议运用包含信用等级的信息来为风险资产定价．在Jarrow、Lando和Turnbull(JLT)1997年的一篇论文中，他们描述了一种假设违约的概率为外生变量的风险债务定价模型[1]．模型依赖信用等级和历史违约信息推出风险债务定价所需的违约概率．模型首先介绍无风险债 234

[1] 参见Jarrow, R. A., Lando, D., and Turnbull, S. M., "A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk spreads," *Review of Financial studies*, 10, 2, (Summer1997), pp. 481-523.

券的定价．假设无套利和完全市场，无违约风险的债券的价格就是在时刻 T 收到的确定数量美元的期望贴现值．

$$P(t,T)=\widetilde{E}\left(\frac{B(t)}{B(T)}\right) \tag{11-13}$$

其中，

$$B(t)=\exp\left(\int_0^t r(s)\mathrm{d}s\right)$$

等式(11-13)表明今天的债券价格是对未来支付以利率 r 贴现后得到．

那么，有违约风险的债券的价格就是时间 T 收到的有风险美元的期望值．

$$v(t,T)=\widetilde{E}\left[\frac{B(t)}{B(T)}(\delta 1_{(\tau^*\leqslant T)}+1_{(\tau^*>T)})\right] \tag{11-14}$$

其中

$v(t,T)=$ 有风险的零息债券的价格

$\delta=$ 违约情况下每一美元收到的比例或回收率

$\tau^*=$ 破产发生的随机时间

当 $x\leqslant a$ 时 $1_{(x\leqslant a)}=1$，当 $x>a$ 时 $1_{(x\leqslant a)}=0$

等式(11-14)说明当没有违约风险时，债券价格和无风险情形下完全一致．如果发行商违约，债券持有人能收回一部分无风险价值，比例为 δ(德尔塔)．德尔塔被称为回收率，因为在破产或违约的情形下，债权人至少可以收回一部分属于他的资金．

假设无违约情况下即期利率的随机过程和破产的过程统计上不相关，有风险的零息债券的价格可以写作：

$$\begin{aligned}v(t,T)&=\widetilde{E}_t\left(\frac{B(t)}{B(T)}\right)\widetilde{E}_t[\delta 1_{(\tau^*\leqslant T)}+1_{(\tau^*>T)}]\\&=P(t,T)[\delta+(1-\delta)\widetilde{Q}_t(\tau^*>T)]\end{aligned} \tag{11-15}$$

其中

$\widetilde{Q}_t(\tau^*>T)$表示 T 时间后违约发生的概率 $\widetilde{Q}$．

于是，现在风险债券的定价简化为违约和无违约情况下得到偿付的加权平均．特别地，等式(11-15)中的第二个因素是违约的概率 $1-Q$ 乘以德尔塔，加上无违约的概率 Q 乘以 1．

235 Q 是每类资产变成另一类资产的转移概率矩阵．

$$Q_{t,t+1}=\begin{bmatrix}q_{11}(t,t+1) & q_{12}(t,t+1) & \cdots & q_{1K}(t,t+1)\\ q_{21}(t,t+1) & q_{22}(t,t+1) & \cdots & q_{2K}(t,t+1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ q_{K1}(t,t+1) & q_{K2}(t,t+1) & \cdots & q_{KK}(t,t+1)\end{bmatrix} \tag{11-16}$$

这样，$q_{ij}\equiv$从资产类 i 转移到资产类 j 的概率．

转移矩阵可以由标准普尔或穆迪等公司提供的信用等级得到．表 11-2 提供

了公司债券平均一年的转移概率．例如，一信用等级为 BBB 的债券年末有 0.0006 的概率可以上升到 AAA 等级．相同的债券年底有 0.7968 概率维持在原先的等级水平，0.0043 的机会陷入破产(等级 D)．有一点不应奇怪，对于每个债券，债券维持在原先等级(矩阵的对角线)的概率最大．注意表中没有和等级 D 对应的行，因为如果一个发行者陷入违约，它就应该没有机会提高信用等级了．

在第 5 章和第 6 章，我们运用无套利机会进行期权定价．JLT 模型依赖于同样的技术，即仅根据历史的违约概率不足以为风险债券定价．换句话说，像标准普尔公司等信用评级机构，根据观测的违约率来制定历史的违约率，那些观测的违约率包括投资者持有债券所要求的风险升水．另一方面，JLT 模型需要风险中性概率．因此为了把风险债券持有者的风险升水包括在内，模型还需要调整历史的违约概率．在风险中性概率下的转移矩阵如下：

$$\tilde{Q}_{t,t+1}=\begin{bmatrix}\tilde{q}_{11}(t,t+1) & \tilde{q}_{12}(t,t+1) & \cdots & \tilde{q}_{1K}(t,t+1)\\ \tilde{q}_{21}(t,t+1) & \tilde{q}_{22}(t,t+1) & \cdots & \tilde{q}_{2K}(t,t+1)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \tilde{q}_{K1}(t,t+1) & \tilde{q}_{K2}(t,t+1) & \cdots & \tilde{q}_{KK}(t,t+1)\end{bmatrix} \tag{11-17}$$

表 11-2 公司信用等级的年转移概率[1]

	年末等级							
年初等级	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC	D	NR
AAA	0.8746	0.0945	0.0077	0.0019	0.0029	0.0000	0.0000	0.0000	0.0183
AA	0.0084	0.8787	0.0729	0.0097	0.0028	0.0028	0.0000	0.0000	0.0246
A	0.0009	0.0282	0.8605	0.0628	0.0098	0.0044	0.0000	0.0009	0.0324
BBB	0.0006	0.0041	0.0620	0.7968	0.0609	0.0151	0.0043	0.0043	0.0545
BB	0.0004	0.0020	0.0071	0.0649	0.7012	0.0942	0.0218	0.0218	0.0970
B	0.0000	0.0017	0.0027	0.0058	0.0451	0.7196	0.0598	0.0598	0.1272
CCC	0.0000	0.0000	0.0102	0.0102	0.0179	0.0665	0.2046	0.0246	0.1176

236

其中 $\tilde{q}_{ij}$ ≡资产转移到另一类资产的概率，且

$$\tilde{q}_{ii}(t,t+1)\equiv-\sum_{j\neq i}^{K}\tilde{q}_{ij}(t,t+1) \tag{11-18}$$

矩阵中的每一项包括一个转移概率和风险调整因子，所以(11-16)就是

$$\tilde{q}_{ij}(t,t+1)=\pi_i(t)q_{ij} \tag{11-19}$$

公式(11-19)说明伴随信用等级改变的风险中性概率由经验概率乘以一个风险升水构成．在本章的例子中，π 总是大于等于 1，所以实际的运用将导致资产改变信用等级的概率被提高，维持在初始信用等级的概率被降低．其经济解释是

[1] 参见 Source: Tavakoli, J. M., *Credit Derivatives: A Guide to Instruments and Applications*. Wiley, New York, 1998, pp. 117.

通过使用风险中性概率(即增加违约概率)，JLT 模型比使用经验概率产生更低的债券价格和更高的收益. 换句话说，如果某人使用 JLT 模型采用的风险中性定价方法而不是包括风险升水的经验违约概率，由模型产生的价格会人为地偏高，而信用等级的差异会人为地偏低. 这是因为一个风险中性的投资者与现实世界的风险厌恶的投资者相比，能够在没有额外补偿的情况下，容忍更多风险. 这样，模型采用风险平均违约概率而增加违约概率，产生了较低的价格和较高的收益.

让我们看一个反映经验和无套利违约概率之间差异的例子. 假设只有三个信用等级，A、B 和 D(违约)，经验的转移矩阵如下：

	年末信用等级		
年初信用等级	A	B	D
A	0.8	0.1	0.1
B	0.1	0.8	0.1
D	0	0	0

如果 $\pi_i=1.5$，运用公式(11-17)和(11-19)，风险中性转移矩阵为：

		年末信用等级		
	年初信用等级	A	B	D
	A	0.7	0.15	0.15
	B	0.15	0.7	0.15
237	D	0	0	0

正如前面描述，实际中的效果在于提高违约的概率，降低它维持在初始信用等级的概率.

根据这种框架，可以写出一个无风险资产和风险资产的信用风险差异升水的表达式. 信用等级为 i 的借贷者发行的零息债券的价格由下式给出：

$$v^i(t,T) = p(t,T)(\delta + (1-\delta)\tilde{Q}_t^i(\tau^* > T)) \tag{11-20}$$

信用等级为 i 的风险零息债券的远期利率定义为：

$$f^i(t,T) = -\ln\left(\frac{v^i(t,T+1)}{v^i(t,T)}\right) \tag{11-21}$$

代入收益率：

$$f^i(t,T) = f(t,T) + 1_{(\tau^* > t)} \ln \frac{[\delta + (1-\delta)\tilde{Q}_t^i(t^* > T)]}{[\delta + (1-\delta)\tilde{Q}_t^i(t^* > T+1)]} \tag{11-22}$$

$$f = \text{无风险资产的远期利率}$$

$$f^i = \text{风险资产的远期利率}$$

该公式提供了一个信用差异或风险升水的表达式，这里风险资产和无风险资产远期利率的差异是违约概率和回收率的函数. 为求即期利率，设定 $T=t$，则公式简化为：

$$r^i(t) = r(t) + \ln \frac{1}{[1-(1-\delta)\tilde{q}_{iK}(t,t+1)]} \tag{11-23}$$

这样，为了求得理论的信用风险升水，估计回收率和风险中性转易概率是必须的．基于历史数据，我们可以计算回收率的估计值．如前面所描述，结合经验转移矩阵和要求的风险升水 π，可以求出风险中性转移矩阵的估计值．JLT 的文章运用代数方法证明了 π_i 可以运用下面公式求出：

$$\pi_i(t) = \sum_{j=1}^{K} \tilde{q}_{ij}^{-1}(0,t)\,\frac{p(0,t+1)-v^i(0,t+1)}{p[0,t+1(1-\delta)q_{iK}]} \tag{11-24}$$

有了 π_i 的表达式和经验的转移矩阵，可以计算出债券所遵循的理论的信用风险升水．

11.6 一个 JLT 模型的假想例子

假设你想要预测到期日为 2006 年 3 月的克罗地亚政府发行政府债券的信用风险升水．你发现如下信息并且运用公式(11-24)得：

$$\text{回收率} = \delta = 0.2$$

$$\text{违约概率} = \tilde{q}_{iK}(t,t+1) = 0.0085 \tag{11-25}$$ 238

这样可以得到：

$$\text{信用风险升水} = r^i(t) - r(t) = \ln \frac{1}{1-(0.8\times 0.0295)} = 0.0239 \tag{11-26}$$

因此，通过模型我们预测出了相同期限的美国政府债券和克罗地亚政府债券的利率之间有 239 个基准点，或者是 2.39%的差异．

习题

1. 从经济学角度解释 Merton 模型中的假设 $e^{[-R(\tau)\tau]}=F(V,\tau)/V$ 是合理的．说明公式(11-11)是怎样从(11-10)推导而得的？

2. 从公式(11-12)推导 Merton 模型中的公式(11-13)．

3. 从经济学角度解释 $p(t,T)=E[B(t)/B(T)]$．

4. 运用 JLT 方法推导公式(11-24)．

5. 运用 Black-Scholes 方法求出下列风险升水：

	V	B	r	τ	σ^2
A	1000 万美元	500 万美元	0.10	0.5	0.2
B	1 亿美元	7500 万美元	0.05	0.5	0.5
C	1 亿美元	7500 万美元	0.05	0.5	0.75
D	10 亿美元	8 亿美元	0.10	1	0.5
E	10 亿美元	8 亿美元	0.10	2	0.5

6. 从经济学角度解释为什么 C 的风险升水大于 B 的升水？而为什么 E 的升

水小于 D?

7. 运用 JLT 方法求出下列风险升水：

	δ	$\tilde{q}_{ik}(t,\ t+1)$
A	0.2	0.01
B	0.2	0.02
C	0.5	0.02

8. 从经济学角度解释，为什么 A 的风险升水小于 B 的升水. 而为什么 C 的

239 升水大于 B?

习题选解

2.2 节

1. $a=0.33$，$V=4.64$

3. $a=-0.125$，$V=2.96$

2.4 节

1. $a=-1$，$V=15.7$

2. $a=-0.4$，$V=2.89$

5. $V=\exp(-rt)(E[S_1]-X)$

2.5 节

1. (a)$V=2.75$ 美元；(b)250；(c)100 美元

3. (a)$V=5.68$ 美元，1333.3，200 美元；(b)$V=1.94$ 美元，-250，100 美元；(c)$V=18.70$ 美元，1666.6，200 美元；(d)$V=2.59$ 美元，-4000，600 美元；(e)$V=2.47$ 美元，2000，400 美元；(f)$V=0.91$ 美元，-600,300 美元

2.7 节

1. (a)7.84；(b)2.81；(c)1.73；(d)25.03；(e)6.61；(f)9.43

3. 出售许多，套期保值以抵消负债.

5. 你买入 250 000 股股票套期保值；你的利润为 100 000 美元

3.1.2 节

1. 2.66 美元；星期二的两个节点为 2.18 美元和 3.63 美元.

3. $pu+(1-p)d=1$

3.2 节

1. 39.9 美元

3. 8.81 美元

3.3 节

1. (a) 14.79；(b) 7.40；(c) 12.26；(d) 11.54；(e) 9.04；(f) 42.02；(g)29.40

3. (a)1.16；(b)20.00；(c)15.59；(d)1.67；(e)2.96；(f)26.11；(g)3.97

3.4 节

1. 23.14

2. 5.29

3.5 节

1. 用 $r=0$，$V=109.33$

3. 用 $r=0$，$V=58.64$

3.7 节

1. (c)对于路径 $uuuu$，德尔塔值是 0.57，0.69，0.89，1.0. 对于路径 $udud$，德尔塔值是 0.57，0.69，0.43，0.64. 对于路线 $dudu$，德尔塔值是 0.57，0.30，0.43，0.0.

3. (e)对于路径 $uuuu$，德尔塔值是 -0.74，-0.17，0.0，0.0. 对于路径 $dddd$，德尔塔值是 -0.74，-0.93，-1，-1，对于路径 $dudu$，德尔塔值是 -0.74，-0.93，-0.75，-1.

4.1 节

3. 因为 $d=1/u$，如果紧接着一个下跌，上涨就抵消了.

4. 图 4-1 基于关系 $ud=0.99$. 一个上涨紧接着一个下跌，将导致价格有少量下跌.

4.2 节

1. $V=16.43$，20.26，24.23

3. $V=29.36$

4.3 节

1. $V=4.32$，不提前执行.

3. $V=1.47$，提前执行.

4.4 节

1. $V=0.31$

3. 期权 #1=23.37；期权 #2=19.10.

5.3 节

1. 每月值 $\mu=0.0867$，$\sigma=0.1117$；每周值 $\mu=0.02$，$\sigma=0.0537$；每天值 $\mu=0.0028$，$\sigma=0.0203$；西格码与 mu 相关性增加.

5.4 节

1. (a)11.84；(b)1.95；(c)2.37；(d)12.30；(e)4.92；(f)14.45；(g)2.31；(h)1.55

2. (a)0.98；(b)7.29；(c)10.02；(d)10.48；(e)11.14；(f)10.79；(g)0.16；(h)1.24

5.6 节

1. (a)运用等式(5-5)，选择 $c=\sigma T$.

3. $\ln(S/X)+rT=\ln(S/X)+\ln(\exp(rT))=\ln(\exp(rT)S/X)$

5.7 节

1. 令 $X=2.7386Z+30$；$\Pr[Z>3.6515]=0.001$.

3. $u=1.0166$，$d=0.9837$，$q=0.4979$

5. 用 $n=50$ 步：$u=1.036$，$d=0.9653$，$q=0.4951$.

6.4 节

1. $\partial V/\partial S=a$，$\partial V/\partial t=rbe^{rt}=rV-arS$；所以 $a=1$ 与远期合约的价格相对应.

3. $\partial V/\partial t=rV+e^{rt}\partial G/\partial t$；将它代入 Black-Scholes 公式.

6.6 节

3. $\partial G/\partial t=rG+e^{rt}\partial V/\partial t$；将它代入等式(6-18).

7.3 节

1. (a)0.45；(b)0.25；(c)0.195；(d)0.25；(e)1.05；(f)0.048；(g)0.673

7.4 节

1. Δ 值：(a)0.411；(b)0.564；(c)0.78；(d)0.216；(e)0.973；(f)0.243

	Δ	Γ	Θ
(a)	0.4240	0.0003	−0.0137
(b)	0.5852	0.0004	−0.0255
(c)	0.7951	0.0002	−0.0304
(d)	0.2233	0.0003	−0.0097
(e)	0.9793	0.0002	−0.0048
(f)	0.2533	0.0007	−0.0057

8.3.2 节

1. $-\ln P=R(T-t)$，所以 $-\partial\ln P/\partial T=R$.

2. ZCB 的价格：(a)0.9465；(b)0.8869；(c)0.6873；(d)0.3679；(e)0.0025

8.3.4 节

1. 0.9867

2. 0.7927

5. 0.2214

7. 0.5902

9. 年率为 5.48%. $P(0,1.5)=\exp(-1.5(0.0548))=0.9211$.

8.4.2 节

1. 0.0242/4.93055=0.00491

3. 0.2716/38.122075=0.0071

8.5.4 节

1. (a)1.1026；(b)1/1.1026；(c)1/1.05；(d)1.05(e)首先注意[0，1]时间段"市场"利率为 1.0509524，其次 1.1026=(1.05)×(1.0509524).

2. 0.907112

8.8 节

1. $\sigma(s,t)^2-\sigma(s,T)^2=(t-T)(t+T-2s)$；对该表达式从 0 到 t 求积分. 那么方程(8-49)可以解出：

$\ln P(t)=\ln P(0, T)-\ln P(0, t)+0.5(t-T)tT+(T-t)B(t)$

现在运用等式(8-50)，对该表达式求导解出 r.

3. $\sigma(s, t)^2-\sigma(s, T)^2=s^2(t-T)(t+T-2s)$；对该表达式从 0 到 t 求积分. 那么方程(8-49)可以解出；再运用等式(8-50)，对该表达式求导解出 r.

9.1 节

1. 运用 $\sigma=0.011$，第一个分支有 $r=0.05$；$0.333\sigma=0.0064$. 接着的两个分支将有 0.0515+0.0064 和 0.0515−0.0064 的 r 值.

10.1 节

1. (a)欧洲货币兑美元：1 马克＝0.4662 美元；1 法郎＝0.139 美元；1 克朗＝0.1222 美元；1 英镑＝1.5065 美元；1 比赛塔＝0.0055 美元；1 日元＝0.0091 美元. (b)美元兑欧洲货币：1 美元＝44.2478 法郎；1 美元＝1.7068 法郎；1 美元＝9.0662 克朗；1 美元＝2.4172 荷兰盾；1 美元＝1.8235 巴西里拉；1 美元＝1.5567 加元.

10.2 节

1. 远期汇率，0.4678

2. 0.0092

11.6 节

1. 为什么 $F=e^{-Rt}V$ 是合理的. V 代表公司的价值，而 F 代表由市场决定的证券价值. 价值和未来价值的不确定性导致某种形式的贴现——从价值到市场价值. 这决定了 R 的值.

2. 为什么 $P(t, T)$是 $B(t)/B(T)$的期望价值? 对于债券持有人的支付是确定性的 1 美元. 但这是在未来发生的，所以其现值是由贴现得到的. $B(t)/B(T)$因子是(不确定)贴现因子. 债券的现值是该数量的期望值.

索　引

索引中页码为英文原书页码，已在书中页边标出。

E

F

G

H

I

S

T

U

V

Y

Z

[General Information]
书名=金融数学
SS号=11225453